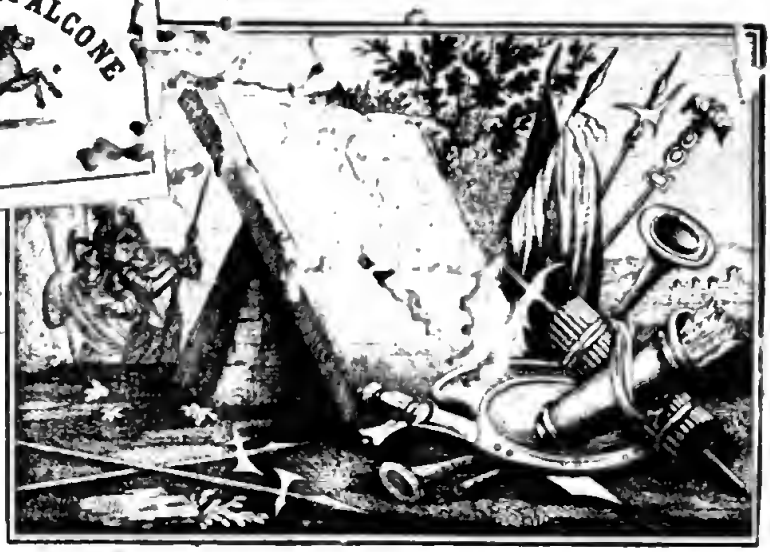
FONDO PIZZOFALCONE



BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

Palchetto

Num.° d' ordine

NAZIONALE
B. Prov.
2293
NAPOLI

R. BIBLIOTECA
VITT. EM. III

B. Mus.
I
2293

608496

COURS

DE MATHÉMATIQUES,

A L'USAGE

DU

CORPS ROYAL DE L'ARTILLERIE.

TOME QUATRIÈME.

Concernant l'application des Principes généraux de la MÉCANIQUE, à différens cas de mouvement & d'équilibre.

Par M. BÉZOUT, de l'Académie royale des Sciences & de celle de Marine, Examinateur des Elèves & des Aſpirans du Corps royal de l'Artillerie, & des Gardes du Pavillon & de la Marine; Cenſeur royal.

BIBLIOTECA PROVINCIALE di NAPOLI

A PARIS,

DE L'IMPRIMERIE DE PH.-D. PIERRES,
Premier Imprimeur Ordinaire du Roi, rue S. Jacques.

M. DCC. LXXXVIII.
Avec Approbation, & Privilége du Roi.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE NAPOLI

DI
NAPOLI

APPLICATIONS
DES PRINCIPES GÉNÉRAUX
DE
LA MÉCANIQUE,
A DIFFÉRENS CAS
DE MOUVEMENT ET D'ÉQUILIBRE.

Du choc direct des Corps.

350. Il s'agit actuellement de déterminer de quelle manière le mouvement d'un corps passe, en tout ou en partie, à un autre corps, soit immédiatement, soit à l'aide des machines.

Nous débuterons, dans cette recherche, par considérer l'action immédiate d'un corps en mouvement,

ſur un autre corps en repos ou en mouvement; & nous ferons d'abord abſtraction de la peſanteur des corps, de la réſiſtance de l'air, des frottemens, &c.

Nous ſuppoſerons que les corps dont nous allons conſidérer le choc, agiſſent les uns ſur les autres ſuivant une même ligne droite paſſant par leurs centres de gravité, & que cette ligne droite eſt perpendiculaire au plan qui toucheroit leur ſurface dans le point où ils ſe rencontreront.

Nous diſtinguerons deux ſortes de corps; les uns que nous appellerons *corps durs*, ſeront ſuppoſés tels qu'aucune force ne peut changer leur figure; les autres que nous appellerons *corps élaſtiques*, ſeront ſuppoſés pouvoir changer de figure, c'eſt à-dire, être *compreſſibles*, mais doués en même-temps de la propriété de reprendre cette figure, dès que la compreſſion ceſſera.

Quoiqu'il n'y ait point, dans la Nature, de corps d'une maſſe ſenſible, qui ſoit parfaitement dans l'une ou dans l'autre de ces deux claſſes, ce n'eſt, cependant, qu'en partant de cette ſuppoſition, qu'on peut parvenir à déterminer l'action des corps tels que la Nature nous les offre.

Du choc direct des Corps durs.

351. Deux corps durs qui viennent à ſe rencontrer, ou dont l'un vient à rencontrer l'autre

BIBLIOTECA PROVINCIALE DI NAPOLI

ſuppoſé en repos, ſe communiquent ou ſe font perdre une partie de leur mouvement. Mais de quelque manière que les choſes ſe paſſent, on peut toujours (287) à l'inſtant du choc, ſe repréſenter chaque corps, comme animé de deux vîteſſes, dont l'une ſubſiſtera après le choc, & dont l'autre ſera détruite.

Suppoſons donc d'abord que les deux corps ſont mus d'un même ſens; il eſt clair que celui qui va le plus vîte, perdra de ſa vîteſſe, & qu'au contraire l'autre en gagnera par le choc.

Soit M la maſſe du choquant, & V ſa vîteſſe avant le choc; m la maſſe du choqué (qui peut être plus petite ou plus grande que M), & U ſa vîteſſe avant le choc. Concevons que la vîteſſe V ſe change en u, par le choc; M aura donc perdu la vîteſſe $V - u$. A l'inſtant du choc, au lieu de le conſidérer comme ayant la vîteſſe V, je le conſidérerai comme ayant la vîteſſe u & la vîteſſe $V - u$.

Si nous ſuppoſons pareillement que U devienne v, par le choc; m aura gagné $v - U$; je puis donc à l'inſtant du choc, le conſidérer comme ayant la vîteſſe v dans le ſens du mouvement actuel, & la vîteſſe $v - U$, en ſens contraire, puiſque dans cette ſuppoſition il n'a réellement que la vîteſſe U.

Puis donc que de ces quatre vîteſſes, il ne doit, par la ſuppoſition, reſter que les deux vîteſſes u & v; il faut donc que les deux autres $V - u$ & $v - U$ ſoient détruites dans le choc; or comme elles ſont directement oppoſées, il faut (186) que les quantités de mouvement que les corps auroient en vertu de ces vîteſſes, ſoient égales. On a donc $M(V - u) = m(v - U)$.

Obſervons maintenant que, pour que u & v ſoient, comme nous le ſuppoſons, les vîteſſes qu'auront, après le choc, les deux corps M & m, il faut qu'elles ſoient telles, que le choquant n'ait plus d'action ſur le choqué; c'eſt-à-dire, qu'après le choc les deux corps doivent aller de compagnie; on a donc $v = u$; donc enfin $M(V - u) = m(u - U)$; ou $MV - Mu = mu - mU$; d'où l'on tire $u = \frac{MV + mU}{M + m}$. C'eſt-à-dire, que *lorſque les corps vont d'un même ſens; pour avoir la vîteſſe après le choc, il faut prendre la ſomme des quantités de mouvement que les corps avoient avant le choc, & la diviſer par la ſomme des maſſes.*

Par exemple, ſi M eſt de 5 onces; m de 7 onces; V de 8 pieds par ſeconde, U de 4 pieds par ſeconde; on aura $u = \frac{5 \times 8 + 7 \times 4}{5 + 7} = \frac{40 + 28}{12} = \frac{68}{12} = 5\frac{8}{12}$; la vîteſſe après le choc, ſera donc de 5 pieds & $\frac{8}{12}$ par ſeconde.

352. Si l'un des deux corps, ſi m par exemple, étoit en repos avant le choc, on ſuppoſeroit $U = 0$; ce qui réduit la vîteſſe après le choc, à $u = \frac{MV}{M+m}$; c'eſt-à-dire, qu'il faut diviſer la quantité de mouvement qu'avoit le choquant, par la ſomme des maſſes.

Au reſte, ſi ſans déduire ce cas, du cas général, on veut le trouver directement, on y parviendra par le même principe. On conſidérera le choqué comme étant animé avant le choc, d'une vîteſſe u égale & de même ſens que celle qu'il doit avoir après le choc, & d'une vîteſſe $-u$, c'eſt-à-dire, d'une vîteſſe égale en ſens contraire. Ainſi puiſqu'il ne doit conſerver que la première, il faudra qu'en vertu de la ſeconde, il faſſe équilibre au corps M animé de la vîteſſe $V - u$ qu'il doit perdre. Il faudra donc que $M(V - u) = mu$; d'où l'on tire $u = \frac{MV}{M+m}$, ainſi que nous l'avions conclu de la formule générale.

353. Si les corps vont dans des ſens oppoſés; pour connoître la vîteſſe après le choc, il n'y a qu'à ſuppoſer dans la première formule $u = \frac{MV + mU}{m+M}$, que U eſt négative; ce qui donne $u = \frac{mV - mU}{M+m}$; c'eſt-à-dire, que

lorſque les corps vont en ſens oppoſés, pour avoir la vîteſſe après le choc, il faut diviſer la différence des quantités de mouvement qui avoient lieu avant le choc, par la ſomme des maſſes; & cette vîteſſe aura lieu dans le ſens de celui qui a la plus grande quantité de mouvement.

On peut auſſi trouver directement ce réſultat, en employant encore le méme principe que ci-deſſus.

Ainſi, les loix du choc direct des corps durs, ſe réduiſent pour tous les cas, à cette ſeule règle; *la vîteſſe après le choc, eſt égale à la ſomme ou à la différence des quantités de mouvement avant le choc, (ſelon que les corps vont d'un même, ou de différens ſens) diviſée par la ſomme des maſſes.*

Réflexions ſur la force d'inertie.

254. Nous avons ſuppoſé, dans ce que nous venons de dire, qu'en faiſant abſtraction de la peſanteur, de la réſiſtance de l'air & de tout autre obſtacle, l'un des deux corps oppoſoit de la réſiſtance à l'autre, & lui faiſoit perdre une partie de ſa vîteſſe. Mais comment un corps ſans peſanteur & qui n'eſt retenu par aucun obſtacle, peut il oppoſer de la réſiſtance? cela ne ſemble-t-il pas ſuppoſer qu'il ſeroit capable de ſe donner du

mouvement, puiſqu'il eſt capable d'en ôter à un autre corps qui agit ſur lui.

Non, la réſiſtance d'un corps libre ne ſuppoſe pas eſſentiellement un mouvement actuel dans ce corps. Par exemple, ſi le corps A eſt tiré en même-temps par deux forces égales & contraires repréſentées par AB, AC (*fig.* 1), il eſt évident qu'il n'aura aucun mouvement. Mais il n'eſt pas moins évident que ſi une force égale CA vient à agir ſur lui dans la direction CB, cette force ſera détruite par l'effort AC, & alors le corps obéira en vertu de la force AB égale à celle qu'on vient d'appliquer.

Nous ne prétendons par décider ſi la réſiſtance que les corps oppoſent au mouvement, vient ou ne vient pas d'une ſemblable cauſe. Quoi qu'il en ſoit, cette réſiſtance à laquelle on a donné le nom de *force d'inertie*, diffère de la réſiſtance qu'oppoſent les forces actives, telles que ſont les forces des corps qui ſe choquent en ſens oppoſés, en ce que celles-ci abſorbent une partie du mouvement; au lieu que la force d'inertie, détruit à la vérité, du mouvement dans le choquant, mais ce mouvement paſſe entièrement dans le choqué. C'eſt ce que démontre évidemment l'équation $M(V - u) = m(u - U)$ que nous avons eue ci-deſſus pour déterminer le mouvement, après le choc, pour deux corps qui vont d'un même ſens; car $V - u$

eſt la viteſſe perdue par le choquant, & par conſéquent $M(V - u$ eſt la quantité de mouvement qu'il perd par le choc, nous avons pareillement entendu par $u - U$ la viteſſe que le choquant a gagné, enſorte que $m\ u - U$, eſt la quantité de mouvement qu'il a gagné. Or nous avons démontré que ces deux quantités devoient néceſſairement être égales.

355. La force d'inertie eſt donc, à proprement parler, le moyen de communication de mouvement d'un corps à un autre. Tout corps réſiſte au mouvement, & c'eſt en réſiſtant qu'il en reçoit; & il en reçoit préciſément autant qu'il en détruit dans celui qui agit ſur lui.

356. On voit donc par-là, que tout obſtacle étant ſuppoſé anéanti, quelque petite que l'on ſuppoſe la maſſe choquante, & quelque grande que ſoit la maſſe choquée, il y aura toujours du mouvement.

En effet, dans le cas, par exemple, où l'un des deux corps eſt en repos, la viteſſe qui (352) a pour expreſſion $u = \frac{MV}{M + m}$, ne peut jamais devenir zéro, quelques valeurs qu'on donne à M, m & V; il n'y a que dans le cas où m ſeroit infinie, ou V infiniment petite. Ainſi, ſi dans la Nature nous voyons les corps perdre le mouvement qu'ils

ont reçu ; c'eſt parce qu'ils le communiquent aux parties matérielles des corps, de l'air, &c. qui les environnent. Et comme la formule $u = \frac{MV}{M+m}$ fait voir que plus le corps choqué m aura de maſſe, plus (toutes choſes d'ailleurs égales) la vîteſſe reſtante u ſera petite ; en regardant m comme la ſomme des parties matérielles avec leſquelles M partage ſon mouvement, on voit que la vîteſſe u peut être bientôt réduite à échapper aux ſens, quand même il ne ſe rencontreroit pas d'obſtacles immobiles, tels que le frottement, &c. pour la détruire.

357. La force d'inertie, étant une force propre à la matière, exiſte également dans chaque partie égale de la matière ; & par conſéquent, dans une maſſe déterminée, elle ſe fait ſentir proportionnellement à la quantité de matière, ou à la maſſe ; & comme la maſſe eſt proportionnelle au poids, la force d'inertie peut être regardée comme proportionnelle au poids. Mais il faut bien ſe donner de garde d'en conclure, que la force d'inertie vienne de la peſanteur, elle en eſt tout-à-fait indépendante ; en effet, ſi pendant qu'un corps tombe librement, on le ſuit de la main, avec une vîteſſe plus grande que celle avec laquelle il tombe, on éprouvera en le rencontrant, un choc, une réſiſtance, qu'on ne peut évidemment attribuer à la peſanteur, qui n'agit que de haut en bas. Encore moins doit-on l'attribuer à la réſiſtance de l'air ;

car outre qu'il reſteroit à ſavoir pourquoi l'air réſiſte, la réſiſtance de l'air ne pouvant agir qu'à raiſon de la ſurface, ne peut être proportionnelle à la quantité de matière.

La force d'inertie eſt donc une force particulière à la matière, par laquelle tout corps réſiſte à ſon changement d'état. *La force d'inertie eſt proportionnelle à la quantité de matière & ſe fait ſentir dans toutes les directions ſelon leſquelles on tend à mouvoir un corps.*

Quelques applications du choc des corps durs : Conſéquences qui en réſultent par rapport à la percuſſion.

358. Les règles que nous venons de donner ſur le choc des corps durs, ont lieu, ſoit que les corps ſe choquent immédiatement, comme nous l'avons ſuppoſé ; ſoit qu'ils ſe pouſſent à l'aide d'une verge inflexible & ſans maſſe, qui joindroit leurs centres de gravité, ſoit enfin qu'ils ſe tirent par un fil, pourvu que l'action ſe tranſmette immédiatement au centre de gravité de chacun.

Par exemple, ſi deux corps *M* & *m* (*fig.* 2) ſe tirent par un fil, paſſant par-deſſus une poulie *l'* *, & que l'on

* Nous ſuppoſerons ici, que l'action ſe tranſmet à l'aide d'une poulie, de la même manière que ſi les deux parties du fil étoient

veuille déterminer le mouvement qu'ils prendront en vertu de leur peſanteur; on obſervera (171) que la peſanteur rend à imprimer à chacun de ces deux corps, une vîteſſe égale, à chaque inſtant. Or comme l'un ne peut ſe mouvoir ſans entraîner l'autre, les deux corps ſe trouvent, à chaque nouvelle action de la peſanteur, dans le même cas que s'ils ſe tiroient en ſens directement oppoſés avec des vîteſſes égales; donc (353) pour avoir la vîteſſe qui en réſultera, il faut, en nommant g la vîteſſe que la peſanteur donne, à chaque inſtant, à un corps libre, il faut, dis-je, prendre la différence $Mg - mg$ des quantités de mouvement, & la diviſer par la ſomme $M + m$ des maſſes; on aura donc $\frac{Mg - mg}{M + m}$ ou $\frac{M - m}{M + m}\,g$ pour la vîteſſe réelle que chaque nouvelle action g de la peſanteur ajoute, à chaque inſtant, dans le corps M. On voit donc, puiſque M, m & g ſont des quantités conſtantes, que le corps M eſt mu d'un mouvement uniformément accéléré, & que la force qui l'accélère réellement, eſt à la peſanteur libre.....

$:: \frac{M - m}{M + m}\,g : g$, ou $:: M - m : M + m$. Donc ſi on nomme p la vîteſſe que la peſanteur fait naître dans un mobile libre, en une ſeconde de temps, on aura celle qu'elle fait naître en pareil temps dans le mobile M gêné par l'action de m, par cette proportion.....

$M + m : M - m :: p : \frac{M - m}{M + m}\,p$; donc ſi on nomme u la vîteſſe de M au bout d'un nombre t de

étendues en ligne droite; nous démontrerons par la ſuite cette vérité, qui eſt d'ailleurs facile à appercevoir.

ſecondes, on aura (173) $u = \frac{M+m}{M-m} p t$; & l'eſpace qu'il aura décrit ſera $e = \frac{M-m}{M+m} \frac{p t^2}{2}$; en mettant (174) 30,2 pieds, pour p.

359. Si, au premier inſtant, le corps m que je ſuppoſe avoir la moindre maſſe, recevoit une impulſion ou une vîteſſe V, c'eſt-à-dire, s'il étoit frappé de manière qu'étant libre & ſans peſanteur, il pût parcourir en une ſeconde, un nombre de pieds marqué par V; alors il partageroit cette action avec le corps M qu'il entraîneroit pendant un certain temps. Pour ſavoir comment ſe feroit ce partage, il faut remarquer qu'au premier inſtant, l'action de la peſanteur étant infiniment petite; le corps m animé de la vîteſſe V, agit ſur le corps M, comme ſi celui-ci étoit en repos. Il faut donc pour avoir la vîteſſe reſtante après l'action (352), diviſer la quantité de mouvement mV, par la ſomme des maſſes; ce qui donnera $\frac{mV}{M+m}$, pour la vîteſſe avec laquelle m entraîneroit M, ſi la peſanteur n'agiſſoit pas dans les inſtans ſuivans. Mais comme nous venons de voir qu'elle agiſſoit de manière à donner au corps M, en ſens contraire, la vîteſſe $\frac{M-m}{M+m} pt$, dans le temps t; il s'enſuit donc qu'au bout du temps t le corps m n'aura plus que la vîteſſe $\frac{mV}{M+m} - \frac{M-m}{M+m} pt$. Par où l'on voit que quelque petite que ſoit m, quelque petite que ſoit la vîteſſe V, & quelque conſidérable que ſoit M; m entraînera toujours M pendant un certain temps, après quoi le corps M reprendra le deſſus, & entraînera m à ſon tour.

En effet, quelle que ſoit la quantité de mouvement mV qu'on imprime à m, tant qu'elle aura une valeur finie, il eſt clair qu'il faudra toujours, pour la conſumer, que la peſanteur agiſſe pendant un certain temps, puiſqu'elle n'agit que par degrés infiniment petits, à chaque inſtant.

Si l'on veut ſavoir au bout de quel temps, m ceſſera de monter; voici comment on s'y prendra. Soit T le temps qu'il faudroit à un corps peſant, tombant librement, pour acquérir la viteſſe V; ſelon ce qui a été enſeigné (173), on aura $V = pT$; donc la viteſſe de m ſe change en $\frac{mpT}{M+m} - \frac{M-m}{M+m}pt$, laquelle étant égalée à zéro, donne.....

$mpT = (M-m)pt$; d'où l'on tire $t = \frac{mT}{M-m}$.

Par exemple, ſi la viteſſe V qu'on a imprimée, eſt celle qu'un corps peſant acquerroit dans une ſeconde de temps; on a $T = 1''$: ſuppoſons $M = 100$ livres, $m = 1$ livre, on aura $t = \frac{1''}{99}$; c'eſt-à-dire, que le corps m n'entraînera M, que pendant un quatre-vingt dix-neuvième de ſeconde; mais enfin il l'entraînera.

On voit donc qu'il n'y a pas de force fi[illegible], ſi petite qu'elle ſoit, qui ne puiſſe vaincre le poids d'un corps; & qu'il n'eſt jamais poſſible de mettre un corps qui eſt actuellement en mouvement, en équilibre avec le poids d'un autre corps, c'eſt à-dire, avec un corps qui n'auroit que la ſimple tendance de la peſanteur. Le premier entraînera d'abord le ſecond, & en ſera enſuite entraîné: il y aura, à

la vérité, un inſtant de repos ; mais ce ſera celui où le premier aura perdu toute la vîteſſe imprimée, & ce ne ſera qu'un inſtant.

360. Ainſi la force des corps en mouvement ne peut être meſurée par des poids, c'eſt-à-dire, par l'action ſeule des poids deſtitués de mouvement local ; mais ſeulement par d'autres forces de corps en mouvement ; par exemple, par celles des corps graves tombés d'une certaine hauteur.

Ainſi, pour avoir une idée de la force d'un corps de 3 livres, qui ſeroit mu avec une vîteſſe de 60 pieds par ſeconde ; je chercherois, par ce qui a été dit (176), de quelle hauteur un corps peſant doit tomber pour acquérir une vîteſſe de 60 pieds par ſeconde ; je trouverois que c'eſt 59 pieds & demi à peu près. J'en conclurois qu'un corps de 3 livres, animé d'une vîteſſe de 60 pieds par ſeconde, doit frapper comme s'il étoit tombé de 59 pieds & demi de haut.

361. La force que les corps en mouvement ſont capables d'exercer, s'appelle la *percuſſion*.

La force de percuſſion ne peut donc, en aucune manière, être comparée à la ſimple preſſion, c'eſt-à-dire, à l'effort que peut faire, par ſon poids, une maſſe ſans mouvement local. Un coup de marteau, même très-foible, fera entrer un clou dans un corps, lorſqu'un poids aſſez conſidérable n'y fera rien ; il en ſera de même d'un corps d'une maſſe

médiocre qui par ſa chute aura acquis un peu de vîteſſe.

La raiſon de cette différence eſt que celui-ci emploie, en un ſeul inſtant, tous les degrés de vîteſſe qu'il a acquis en tombant. Au lieu que le poids qui ne fait que preſſer, ne les reçoit que ſucceſſivement, & les partage en même-temps, au clou & à la maſſe environnante; & comme chacun de ces degrés eſt infiniment petit, il eſt auſſi-tôt abſorbé qu'acquis.

362. Après ce que nous venons de dire, il eſt facile de voir comment on doit s'y prendre, pour déterminer le mouvement d'un corps M (*fig.* 3) qui par ſon poids, entraîneroit le corps M' placé ſur un plan horizontal ſans frottement. L'action de la peſanteur ſur M' étant détruite par le plan horizontal, celle qu'elle exerce ſur M, ſe partage entre M & M', comme dans le cas où un corps agit ſur un autre en repos. Ainſi, en raiſonnant comme ci-deſſus, & nommant g la vîteſſe que la peſanteur donne dans un inſtant à un corps libre, on aura $\frac{gM}{M+m}$ pour la vîteſſe avec laquelle M ſera réellement accéléré. Sa vîteſſe au bout d'une ſeconde de temps, ſera donc $\frac{pM}{M+m}$, p étant celle que la peſanteur fait naître, en une ſeconde de temps, dans un corps libre; donc au bout d'un temps quelconque t, ſa vîteſſe ſera $\frac{pMt}{M+m}$ (173), & l'eſpace qu'il aura décrit, ſera $\frac{\frac{1}{2}pMt^2}{M+m}$ (174).

363. Mais si deux corps comme A & B (*fig.* 4) agissoient l'un sur l'autre, à l'aide d'une verge ou d'un fil ou corde matérielle, c'est-à dire, dont la masse ne fût pas très-petite par rapport à la leur; alors cette verge ou cette corde partageroit leur action. Par exemple, si B recevant subitement vers C une vîtesse connue, étoit obligé d'entraîner le corps A à l'aide du fil matériel AB; il faudroit, dans ce cas, pour avoir la vîtesse après l'action, diviser la quantité de mouvement de B, par la somme des deux masses A & B, plus la masse du fil AB.

364. Si les deux corps M & m (*fig.* 2) s'entraînoient à l'aide d'une corde uniformément pesante; alors la force accélératrice de M, ne seroit plus une force constante, comme elle l'étoit dans le cas examiné (358). Voici comment on la détermineroit, ainsi que le mouvement de M. Soit c la longueur totale de la corde; P sa pesanteur spécifique, ou ce que pèse un pied de longueur de cette corde. Soit x la longueur de la partie PM; on aura $Pm = c - x$. La masse de PM sera donc Px; & celle de Pm, sera $P(c-x)$. Ainsi nous avons d'un côté une masse $= M + Px$; & de l'autre, une masse $= m + P(c-x)$, à chacune desquelles la pesanteur communique pendant l'instant actuel, la vîtesse infiniment petite h. Donc pour savoir quelle vîtesse ils prendront en vertu de leur action mutuelle, il faut diviser la différence des quantités de mouvement, par la somme des masses. On aura donc pour l'accélération de M, la quantité

$$\frac{Mh + Phx - mh - P(c-x)h}{M + Px + m + P(c-x)}$$, qui se réduit à

$$\frac{Mh - mh + 2Phx - Pch}{M + m + Pc}$$; ou bien, en faisant

$M - m$

$M - m - Pc = A$, & $M + m + Pc = B$, ſe réduit à $\frac{Ah + 2Phx}{B}$. Donc cette viteſſe eſt à celle h de la peſanteur, comme $\frac{A + 2Px}{B}$ eſt à 1 ; donc ſi on nomme p la viteſſe que la peſanteur imprime à un corps libre, dans une ſeconde, $\frac{A + 2Px}{B}p$ ſera celle que M acquerroit dans une ſeconde, ſi pendant la durée de cette ſeconde, ſa force accélératrice étoit conſtante. C'eſt donc (181) la quantité qu'il faut mettre pour p dans la formule $p\,dt = d\left(\frac{de}{dt}\right)$ que nous avons donnée (184) pour les mouvemens variés ; & on mettra en même temps dx au lieu de de, parce que de quelqu'endroit que M ſoit parti d'abord, l'eſpace qu'il décrit à chaque inſtant, eſt égal à l'augmentation dx de la longueur de PM. On aura donc $\frac{A + 2Px}{B}p\,dt = d\left(\frac{dx}{dt}\right)$.

Pour intégrer cette équation, je diviſe par dt, & je multiplie par dx ; j'ai $\frac{Adx + 2Pxdx}{B}p = -\frac{dx}{dt}d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ dont l'intégrale eſt $\frac{Ax + Px^2}{B}p + C = \frac{1}{2}\frac{dx^2}{dt^2}$. Pour déterminer la conſtante C ; je remarque que $\frac{dx}{dt}$ eſt (179) la viteſſe ; donc ſi on ſuppoſe qu'au commencement du mouvement, M étoit en O, PO étant $= b$, & qu'il n'ait reçu aucune impulſion, il faut que la conſtante C ſoit telle que la viteſſe ſoit zéro, lorſque $x = b$; on a donc $\frac{Ab + Pb^2}{B}p + C = 0$, & par conſéquent

$C = \frac{-Ab - Pb^2}{B} p$; donc.....

$\frac{Ax + Px^2 - Ab - Pb^2}{B} p = \frac{1}{2} \frac{dx^2}{dt^2}$. Nommons z l'eſpace parcouru OM ; nous aurons $z = x - b$, ou $x = b + z$, & $dx = dz$, ce qui changera notre équation en $\frac{Az + 2Pbz + Pz^2}{B} p = \frac{\frac{1}{2} dz^2}{dt^2}$, d'où l'on tire $dt = \frac{dz \sqrt{\frac{B}{2p}}}{\sqrt{[(A + 2Pb)z + Pzz]}}$, équation que l'on intégrera facilement, en la rendant rationnelle par ce qui a été dit (118), & l'on aura le rapport de l'eſpace au temps, qui eſt ſuppoſé ici, compté en ſecondes.

Quant à la vîteſſe, puiſqu'elle eſt exprimée par $\frac{dz}{dt}$, en la nommant u, on aura.....

$u = \frac{\sqrt{[(A + 2Pb)z + Pzz]}}{\sqrt{\frac{B}{2p}}}$, u étant ce que le corps eſt capable, à chaque inſtant, de décrire dans une ſeconde, en vertu de ſon mouvement actuel continué uniformément.

Remarque ſur les forces vives.

365. On a donné le nom de *forces vives*, aux forces des corps en mouvement ; & on a appelé *forces mortes*, celles qui, comme une ſimple preſſion, ne ſuppoſent point un mouvement actuel dans la cauſe qui agit.

Il y a eu pendant quelque temps un partage de ſentimens entre les Mathématiciens, ſur la

meſure des forces vives, ou des forces des corps en mouvement. Quelques-uns ont prétendu que ces forces ne devoient pas ſe meſurer par la maſſe multipliée par la vîteſſe, ainſi que nous avons dit (157) qu'il falloit le faire ; mais qu'il falloit les meſurer par le produit de la maſſe par le quarré de la vîteſſe. Comme on pourroit craindre que cette différence dans la meſure des forces, n'intéreſsât la Mécanique, nous croyons devoir en dire un mot.

Il eſt abſolument indifférent de meſurer la force des corps en mouvement, ou par la maſſe multipliée par la vîteſſe ſimple, ou par la maſſe multipliée par le quarré de la vîteſſe, pourvu qu'on n'attache pas la même idée au mot *force*, dans chaque cas.

Quand on prend pour meſure de la force, le produit de la maſſe par le quarré de la vîteſſe ; alors on entend par le mot *force*, le *nombre* d[illegible] obſtacles qu'un corps en mouvement peut vaincre ; & il eſt certain, qu'à maſſe égale, le nombre des obſtacles qu'un corps en mouvement peut vaincre, eſt proportionnel au quarré de la vîteſſe. Par exemple, ſi le corps *A* (*fig.* 5) n'a préciſément que la vîteſſe néceſſaire pour fermer un reſſort tel que *ACB* ; il ne faudra à un corps égal *M*, qu'une vîteſſe double pour fermer quatre reſſorts

égaux à *ACB*. En effet, ſi on conçoit que les quatre reſſorts ſoient ouverts de la même quantité angulaire chacun, que l'eſt le ſeul reſſort *BCA*, il eſt facile de voir que la force qu'il faut oppoſer en *M*, pour empêcher une plus grande extenſion de ces reſſorts, eſt la même que celle qu'il faut oppoſer en *A*, pour empêcher le reſſort *BCA* de s'ouvrir davantage. Car le reſſort *HIM* n'oppoſe pas en *M*, plus de réſiſtance qu'il ne le feroit, ſi le point *H*, de la branche *HI*, au lieu de tenir à la branche *HG*, étoit appuyé contre un plan fixe *PQ*. Cela poſé, il eſt donc facile de voir que la réſiſtance que *M*, éprouvera de plus que *A*, pour fermer les quatre reſſorts de la même quantité angulaire que le ſera *BCA* dans un inſtant, ne viendra que de ce qu'il éprouvera plus long-temps la même reſiſtance que *A*; ayant quatre fois autant d'eſpace à parcourir avec une vîteſſe qui n'eſt que double, il emploiera un temps double, pendant lequel il éprouvera, par conſéquent, deux fois autant de réſiſtance que *A* en aura éprouvé : il perdra donc un degré de vîteſſe double pour parvenir à fermer les quatre reſſorts, chacun de la même quantité augulaire que *BCA* l'aura été pendant un inſtant. Raiſonnant de même pour les inſtans ſuivans, on verra de même que les réſiſtances que *A* & *M* éprouvent

pour fermer leurs reſſorts reſpectifs d'une même quantité angulaire, ſont toujours dans le rapport de 1 à 2; donc les réſiſtances totales ſont auſſi comme 1 à 2; donc la vîteſſe double ſuffira pour fermer les quatre reſſorts.

On voit donc que le nombre des obſtacles que peuvent vaincre les corps en mouvement, croît comme les quarrés des vîteſſes. Mais, par le mot *force*, doit-on entendre le *nombre* des obſtacles? Ou bien n'eſt-il pas plus naturel d'entendre la *ſomme* des réſiſtances que ces obſtacles ont oppoſées; car, ce n'eſt pas ſeulement le nombre, mais encore la valeur de chaque obſtacle qui détruit le mouvement. Or dans ce cas, chaque réſiſtance inſtantanée étant évidemment proportionnelle à la quantité de mouvement qu'elle fait perdre (& en cela on a toujours été d'accord), la ſomme des réſiſtances ſera proportionnelle à la quantité de mouvement qui a été conſumée; donc ſi, par *force*, on entend la *ſomme* & non pas ſeulement le *nombre* des réſiſtances qu'un corps en mouvement peut vaincre, la force eſt proportionnelle à la quantité de mouvement. D'ailleurs, en partant de ce principe, on en déduit également que les nombres de réſiſtance vaincues, ſont comme les quarrés des vîteſſes. La queſtion n'eſt donc, au fond, qu'une queſtion de mots; elle ſe réduit à

convenir de ce qu'on entend par le mot *force*. Or ſur ce point, on eſt libre ; pourvu qu'on emploie ce que l'on prend pour meſure de la force, conſéquemment à l'idée qu'on attache au mot force, on arrivera toujours aux mêmes réſultats. Ainſi nous continuerons de prendre pour meſure des forces, le produit de la maſſe par la vîteſſe ; & par conſéquent nous entendons par la force d'un corps, la ſomme totale des réſiſtances néceſſaires pour épuiſer ſon mouvement.

Du choc des Corps élaſtiques.

366. Quoique les corps *élaſtiques* ou *à reſſort*, ſuivant l'idée que nous en avons donnée (350) ; doivent être compreſſibles, pour être élaſtiques ; il ne faut pas croire néanmoins qu'ils doivent être d'autant plus compreſſibles qu'ils ſont plus élaſtiques. Une balle de laine n'eſt pas plus élaſtique qu'une bille d'ivoire qui cependant eſt beaucoup moins compreſſible.

Quoi qu'il en ſoit, la compreſſibilité paroît inſéparable de l'élaſticité. En vertu de la compreſſibilité, un corps change de figure lorſqu'on lui applique extérieurement une force ; & en vertu de l'élaſticité, il tend à revenir à cette figure. Mais entre tous les corps élaſtiques, c'eſt-à-dire, qui,

devenus libres, tendent à reprendre leur figure, les uns la reprennent entièrement, les autres en partie ſeulement; ces derniers ſont dits *corps à reſſort imparfait.* Quant aux autres, ils peuvent revenir à leur figure primitive plus ou moins promptement, & par des degrés fort différens. Mais s'ils ſont tels qu'après s'être choqués, ils ſe rétabliſſent par les mêmes degrés par leſquels ils ſe ſont comprimés, on les appelle *corps à reſſort parfait.* Dans tout autre cas, on les appelle ſimplement *corps à reſſort.* Nous ne conſidérerons ici que les corps à reſſort parfait.

Obſervons à l'égard de ceux-ci, que puiſque dans le choc, il ſe fait une réſiſtance de la part de celui qui a le moins de vîteſſe, & que par conſéquent il y a compreſſion; non-ſeulement le rétabliſſement de la figure ſuit cette compreſſion, mais ce rétabliſſement eſt lui-même ſuivi d'un nouveau changement de figure tout contraire au premier. A celui-ci, il en ſuccède un autre qui ramène à la figure qu'ils avoient lors de la compreſſion, & ainſi de ſuite; en ſorte que les parties de chaque corps, ont à l'égard de leur centre de gravité, un mouvement de vibration ou d'allée & de retour; parce que les parties tendent à revenir à leur première figure par un mouvement qui va en s'accélérant, & qui les fait paſſer

au-delà. Ces changemens alternatifs de figure ſont ſenſibles dans pluſieurs corps élaſtiques lorſqu'on les frappe, principalement dans les corps ſonores.

Cependant il ne faut pas imaginer que ces vibrations influent ſur la vîteſſe que prendront les corps élaſtiques après le choc. Elles ne peuvent influer ſur le mouvement des centres de gravité de ces corps, ainſi que nous l'avons vu (288), puiſque ces mouvemens s'exécutent dans chacun des deux corps indépendamment de l'autre. C'eſt une action des parties d'un même corps les unes ſur les autres.

Voici donc comment on doit enviſager le choc des corps parfaitement élaſtiques. Lorſque les deux corps *A* & *B* (*fig.* 4) viennent à ſe rencontrer en *C*, la réſiſtance que *B* oppoſe à *A*, fait qu'ils ſe compriment mutuellement juſqu'à ce que les deux centres & le point de contact aient tous une égale vîteſſe : juſque-là tout ſe paſſe comme dans le choc des corps durs, au changement de figure près, qui ne peut contribuer en rien à la quantité de mouvement perdue ou gagnée.

Le changement de figure ſe fait de manière que chacun des deux corps s'aplatit également de chaque côté ; parce que les parties les plus éloignées du contact, s'avançant plus promptement dans l'un, & moins promptement dans l'autre, juſqu'à ce que

la compreſſion ſoit finie, reſoulent d'autant les parties intermédiaires. La compreſſion une fois achevée, les parties de chaque corps, voiſines du point de contact, s'appuient les unes contre les autres, pendant que le contact eſt tranſporté ; & alors tout le débandement du reſſort s'exerce vers les côtés oppoſés du point de contact ; en ſorte que les centres ſont entraînés en ſens oppoſés, avec tout l'effort avec lequel la reſtitution tend à ſe faire.

On voit donc que le choqué perd alors une vîteſſe égale à celle qu'il avoit perdue par la compreſſion ; & qu'au contraire le choquant en gagne une égale à celle qu'il avoit déjà gagnée pendant la compreſſion. Et quoique les deux corps ne s'arrêtent pas à leur figure primitive dès qu'une fois ils y ſont arrivés, néanmoins ils n'ont plus alors d'action l'un ſur l'autre, parce que la force avec laquelle ils vont ſe dilater, ira en diminuant ; par conſéquent ils ſe quittent à ce terme.

Cela étant, il s'enſuit évidemment que les circonſtances du choc des corps parfaitement élaſtiques, ſont toutes compriſes dans cette ſeule règle.....

367. *Cherchez la vîteſſe commune qu'auroient les corps, après le choc, s'ils étoient ſans reſſort : alors, ſi du double de cette vîteſſe, vous ôtez la*

vîteſſe que chacun avoit avant le choc, vous aurez les vîteſſes de chacun, après le choc. Sur quoi il faut obſerver, que quand les corps vont en ſens contraire avant le choc, on doit donner le ſigne — à la vîteſſe de celui qui a la moindre quantité de mouvement ; en ſorte que dans l'application de cette règle, cette vîteſſe doit être ajoutée.

En effet, ſi lorſque les deux corps vont du même ſens, V eſt la vîteſſe du choquant, & U celle du choqué ; que u ſoit la vîteſſe qu'ils auroient après le choc, conſidérés comme corps durs ; alors $V - u$ eſt la vîteſſe perdue par le choquant ; puis donc que le reſſort, en ſe débandant en ſens contraire au mouvement, fait perdre autant de mouvement que la compreſſion en avoit déjà fait perdre ; il ne reſtera donc que la vîteſſe $u - (V - u)$, c'eſt-à-dire, $u - V + u$, ou $2u - V$. A l'égard du choqué, $u - U$ eſt la vîteſſe qu'il gagne par le choc ; or nous venons de voir que par le débandement de ſon reſſort, il en acquiert encore autant ; il aura donc $u + u - U$, c'eſt-à-dire, $2u - U$. Ce cas comprend celui où l'un des deux corps auroit été en repos avant le choc.

Si les corps alloient en ſens contraire, le raiſonnement eſt encore le même pour celui des deux qui a la plus grande quantité de mouvement. Quant

à l'autre ; dans le choc, comme corps dur, il perdroit ſa vîteſſe & en acquerroit une autre en ſens contraire. Soit u cette vîteſſe ; alors la vîteſſe avec laquelle ſon reſſort ſe rétablit, eſt $U + u$, laquelle étant jointe à u, qu'il auroit eu comme corps dur, donne $2u + U$.

368. Il eſt facile de déduire de-là, des formules pour le choc des corps élaſtiques, dans leſquelles il n'entre autre choſe que les maſſes & les vîteſſes avant le choc ; il ne faut pour cela que ſubſtituer dans $2u - V$ & $2u \mp U$, la valeur de u que donnent les règles établies (351 & *ſuiv*). Mais comme ces formules ne donnent rien d'auſſi facile à retenir que la règle que nous venons d'énoncer, nous laiſſons cette ſubſtitution à faire, à ceux qui en ſeront curieux.

369. Obſervons que lorſqu'un des deux corps eſt en repos, la vîteſſe qu'il reçoit par le choc eſt double de celle qu'il auroit eue s'il n'eût point été élaſtique. C'eſt une ſuite évidente de la règle générale.

370. Pour donner quelques exemples de ces règles, ſuppoſons d'abord que les deux corps ſont égaux, & que l'un des deux eſt en repos ; alors $\frac{MV}{M+m}$ qui (351) exprime la viteſſe après le choc des corps

conſidérés comme durs, ſe réduit à $\frac{MV}{2M}$, ou $\frac{1}{2}V$. Il faut donc (367) de deux fois $\frac{1}{2}V$ ou de V, retrancher V pour avoir la viteſſe du choquant après le choc, laquelle ſera par conſéquent zéro.

Pour avoir la viteſſe du choqué, il faut de deux fois $\frac{1}{2}V$ retrancher la viteſſe zéro qu'il avoit avant le choc, ce qui donne V pour la viteſſe après le choc; c'eſt-à-dire, que le mouvement du choquant paſſe entièrement dans le choqué. D'où l'on peut conclure que ſi l'on avoit pluſieurs corps élaſtiques égaux, placés ſur une même ligne droite, & que l'on vînt à faire choquer l'un des extrêmes par un corps élaſtique égal à l'un d'entre eux, il n'y auroit que l'autre extrême qui ſe détacheroit. Que ſi l'on faiſoit choquer en même temps, par deux corps élaſtiques pareils à ceux-là, il n'y auroit que ce dernier & l'avant-dernier qui ſe détacheroient; & ainſi de ſuite.

Suppoſons que les deux corps vont du même ſens. L'un a 5 onces de maſſe, & une viteſſe de 6 pieds par ſeconde; l'autre a 7 onces de maſſe, & une viteſſe de 2 pieds par ſeconde. La viteſſe qu'ils auroient après le choc, comme corps durs (351), ſera $\frac{44}{12}$ ou $3\frac{8}{3}$; ſi donc du double de cette quantité, c'eſt-à-dire, de $7\frac{1}{3}$, j'ôte les viteſſes 6 & 2 qui avoient lieu avant le choc, j'aurai $1\frac{1}{3}$, & $5\frac{1}{3}$ pour les viteſſes du choquant & du choqué après le choc.

Si le choqué, au lieu d'avoir 7 onces de maſſe, comme dans cet exemple, en avoit 20; alors la viteſſe après le choc, comme corps durs, ſeroit $\frac{70}{25}$ ou $2\frac{4}{5}$. Or ſi du double $5\frac{1}{5}$, on retranche les viteſſes 6 & 2 qui avoient lieu avant le choc, on aura $5\frac{1}{5} - 6$ &

3 $\frac{1}{3}$ — 2, ou — $\frac{2}{3}$ & 3 $\frac{1}{3}$, pour les vîteſſes après le choc, où le ſigne — indique que le choquant rebrouſſera.

Si les deux corps viennent à la rencontre l'un de l'autre, avec les mêmes maſſes & les mêmes vîteſſes que dans le ſecond exemple, alors la vîteſſe après le choc, comme corps durs, ſeroit $\frac{30 - 14}{12}$ ou 1 $\frac{4}{12}$.

Si du double de cette quantité, on retranche la vîteſſe 6 que le choquant avoit avant le choc, on aura — 3 $\frac{1}{3}$ pour ſa viteſſe après le choc; le ſigne — indique donc qu'il rebrouſſera avec une vîteſſe de 3 pieds & $\frac{1}{3}$. A l'égard du choqué, il faut (367) à ce même double de 1 & $\frac{1}{3}$ ajouter la vîteſſe 2 avant le choc, & l'on aura 4 $\frac{1}{3}$ pour ſa vîteſſe après le choc.

371. Puiſque (367) lorſque les corps élaſtiques vont du même ſens avant le choc, les vîteſſes après le choc ſont $2u - V$ & $2u - U$, (u étant celle qu'ils auroient après le choc s'ils n'étoient point élaſtiques); la différence de ces deux vîteſſes qui eſt $V - U$, eſt donc la même que la différence des vîteſſes avant le choc. Cette différence eſt ce qu'on appelle la *vîteſſe reſpective*, qui eſt donc la même avant & après le choc.

Au contraire, quand les corps avant le choc vont en ſens oppoſés, leurs vîteſſes, après le choc, ſont $2u - V$ & $2u \pm U$, dont la différence

eſt $V + U$ qui étoit leur vîteſſe reſpective, ou celle avec laquelle ils s'approchoient l'un de l'autre avant le choc. Donc celle avec laquelle ils s'éloignent après le choc, eſt la même que celle avec laquelle ils s'approchoient avant : ainſi, en général, *dans le choc des corps élaſtiques, la vîteſſe reſpective eſt la même avant & après le choc.*

Du choc & de la réſiſtance des Fluides.

372. Concevons qu'un corps M (*fig. 6*) terminé par une ſurface plane AB, choque perpendiculairement à cette ſurface, une couche de corps infiniment petits & ſans reſſort, dont la ſomme totale des maſſes ſoit m. La vîteſſe qu'il a avant le choc étant V, celle qu'il aura après le choc (352) ſera $\frac{MV}{M+m}$. Donc celle qu'il aura perdue ſera $V - \frac{MV}{M+m}$, c'eſt-à-dire, $\frac{mV}{M+m}$, ou ſimplement $\frac{mV}{M}$, parce que nous ſuppoſons que m eſt infiniment petite à l'égard de M. Donc la quantité de mouvement que M aura perdue, ou la réſiſtance qu'il aura éprouvée, ſera $\frac{mV}{M} \times M$, ou mV.

Si l'on conçoit maintenant, que pendant un

temps infiniment petit, le corps M s'avance de la quantité infiniment petite Bb, & qu'à chaque pas, la couche des particules qu'il a choquée d'abord, s'anéantiſſe pour faire place à une autre qui ſoit choquée à ſon tour ; il eſt clair que de B en b, la vîteſſe ne pouvant diminuer qu'infiniment peu, la perte de mouvement que le corps fera, à la rencontre de chaque couche, ſera la même, & égale à mV ; donc la ſomme des réſiſtances que lui auront faites les couches qu'il aura rencontrées de B en b, ſera mV répétée autant de fois qu'on peut concevoir de particules dans l'eſpace Bb. Or ſi on appelle a l'épaiſſeur infiniment petite de chaque particule ; $\frac{Bb}{a}$ exprimera le nombre de celles qui peuvent être rangées ſur Bb ; on aura donc $mV \times \frac{Bb}{a}$, pour la réſiſtance que M aura éprouvée pendant une durée infiniment petite. Mais (160) la maſſe m de la première couche, eſt égale au volume de cette couche, multiplié par ſa denſité, c'eſt-à-dire, en nommant D cette denſité & S la ſurface AB, eſt égale à $D \times S \times a$; donc $m = DSa$; donc la réſiſtance que j'appelle R, devient $R = DSaV \times \frac{Bb}{a} = DSV \times Bb$.

Obſervons maintenant, que Bb étant l'eſpace

parcouru par le corps pendant un temps infiniment petit, que je repréſente par dt, pendant lequel la vîteſſe peut être ſuppoſée uniforme, on a $Bb = Vdt$ (179). Donc la réſiſtance $R = DSV^{n}dt$.

373. Si l'on conçoit que les petits corps dont il vient d'être queſtion, ſoient les molécules qui compoſent un fluide incompreſſible ; on remarquera que puiſqu'il eſt de la nature des fluides (295) de tranſmettre également, dans tous les ſens, la preſſion qu'on leur applique ; dès que les molécules voiſines de AB recevront le choc, elles le tranſmettront aux parties voiſines qu'elles obligeront de couler le long de la ſurface du corps, pour remplir l'eſpace que le corps en ſe tranſportant, tend à laiſſer vide derrière lui ; & elles ſuccèderont à celles qu'elles auront chaſſées, pour laiſſer place à de nouvelles, qui recevant de même le choc du corps M, agiront enſuite de la même manière ; & ainſi de ſuite. Donc l'expreſſion $DSV^{n}dt$, exprime généralement la réſiſtance qu'éprouve à chaque inſtant, le corps M, mu dans un fluide dont la denſité eſt D, en ſuppoſant que chaque couche s'échappe à meſure qu'elle a été choquée.

374. Donc, par la même raiſon, ſi un autre corps

corps se meut avec une vîtesse u, dans un autre fluide dont la densité soit D', & présente perpendiculairement une surface s; on aura, en nommant r la résistance qu'il éprouve pendant un pareil instant dt, $r = D' s u^2 dt$. D'où l'on conclura $R : r :: DSV^2 dt : D' s u^2 dt :: DSV^2 : D' s u^2$. C'est-à-dire, que *si deux corps se meuvent avec des vîtesses différentes* V & u, *dans deux fluides dont les densités soient* D & D', & *présentent perpendiculairement des surfaces* S & s; *les résistances qu'ils éprouveront dans un même instant, seront comme les densités multipliées par les surfaces, & multipliées par les quarrés des vîtesses.*

375. Donc si la surface est la même, & la densité la même, les résistances seront comme les quarrés des vîtesses; car alors on aura $R : r :: DSV^2 dt : DSu^2 dt :: V^2 : u^2$. Donc *les résistances qu'un même corps éprouve successivement de la part d'un même fluide, dans des instans égaux, sont comme les quarrés des vîtesses.*

376. Il est donc facile, par la proposition générale que nous venons d'établir (374), de trouver le rapport des résistances, lorsque les densités sont les mêmes, ou lorsque les surfaces sont les mêmes, ou lorsque les vîtesses sont les mêmes. Ainsi on voit par l'équation $R =$

$DSV^2 dt$; que toutes choſes d'ailleurs égales, le choc d'un fluide eſt d'autant plus grand que ſa denſité eſt plus grande ; en ſorte que l'eau de mer eſt capable d'un plus grand choc que l'eau douce ; l'air n'eſt capable que d'un choc encore beaucoup moindre que celui de l'eau douce ; & la force dont il eſt capable, varie beaucoup par le chaud & par le froid, qui peuvent changer beaucoup ſa denſité.

377. Si le fluide étoit élaſtique, & que la première couche choquée pût être cenſée anéantie avant que d'avoir eu aucune action ſur les ſuivantes, tout ce que nous venons de dire, auroit également lieu ; avec cette différence ſeulement, que la valeur abſolue de la réſiſtance, ſeroit double ; c'eſt une ſuite de ce qui a été dit (369).

Il ne faut cependant pas diſſimuler que les principes, dont nous venons de déduire les loix du choc des fluides, ne ſont pas ſuffiſans pour déterminer leur choc ou leur réſiſtance abſolue ; nous en donnerons la raiſon plus bas, & nous verrons à quoi on peut s'arrêter ſur la meſure abſolue de cette réſiſtance. Mais les formules que nous venons de donner, peuvent être employées à comparer les réſiſtances entre elles.

378. Si au lieu de concevoir, comme nous

l'avons fait, que le corps M (*fig.* 6) choqué dans un inſtant dt, tous les petits corps contenus dans l'eſpace $ABba$, on conçoit au contraire, que le corps M ſoit immobile, & qu'à chaque inſtant dt, il ſoit frappé par un volume de fluide, égal à $ABba$, mu avec la vîteſſe V, & qui s'anéantiſſe après avoir fait ſon choc ; on démontrera de la même manière, que la quantité de mouvement infiniment petite, que ce choc fera paſſer dans le corps M, aura pour expreſſion $DSV^2\,dt$. D'où l'on conclura, que *c'eſt la même choſe que le corps choque le fluide, ou que le fluide choque le corps ; pourvu que la viteſſe ſoit la même dans chaque cas.*

379. Ramenons à des meſures plus connues, l'évaluation que nous venons de faire, de la réſiſtance ou du choc des fluides.

Si l'on ſuppoſe que h ſoit la hauteur d'où un corps peſant devroit tomber pour acquérir la vîteſſe V avec laquelle nous ſuppoſons que le corps M ſe meut ; ſelon ce qui a été dit (176), on aura $h = \frac{V^2}{2p}$, p étant la vîteſſe que la peſanteur engendre, en une ſeconde de temps, dans un corps libre. Si de cette équation, on tire la valeur de V^2, pour la ſubſtituer dans l'expreſſion que nous avons trouvée (372) pour

la réſiſtance, nous aurons $R = 2\,DShpdt$; & $R = 4\,DShpdt$ pour les fluides élaſtiques. Or puiſque p exprime la vîteſſe que la peſanteur engendre, en une ſeconde de temps; pdt eſt ce qu'elle engendre pendant l'inſtant dt, puiſque (172) les vîteſſes qu'elle communique, ſont dans la raiſon des temps. D'un autre côté $2\,DSh$ exprime (160) la maſſe d'un priſme ou d'un cylindre du fluide dont il s'agit, lequel priſme auroit pour baſe la ſurface S, & pour hauteur $2h$; c'eſt-à-dire, le double de celle dont un corps peſant devroit tomber pour acquérir la vîteſſe avec laquelle cette ſurface ſe meut dans le fluide; donc $2\,DShpdt$ exprime la quantité de mouvement que ce priſme acquerroit pendant un inſtant par l'action libre de la peſanteur; c'eſt-à-dire, qu'il exprime le poids de ce priſme. Donc d'après les principes ci-deſſus, la réſiſtance qu'éprouve un corps, mu dans un fluide en repos; ou le choc qu'un corps en repos éprouve de la part d'un fluide en mouvement, eſt égale au poids d'un priſme de ce fluide, qui auroit pour baſe la ſurface choquée, & pour hauteur, le double de la hauteur dont un corps peſant devroit tomber pour acquérir la vîteſſe avec laquelle le corps ou le fluide, ſe meut actuellement. Et dans les fluides élaſtiques, la réſiſtance a pour meſure le double du poids de ce priſme.

380. Les différens Auteurs qui ont traité de la réſiſtance des fluides, ne s'accordent pas trop ſur la meſure de la valeur abſolue de cette réſiſtance : quelques-uns la font moitié moindre que nous ne la trouvons ici. Ceux qui ont conſulté l'expérience, ne s'accordent pas mieux entre eux.

La théorie ci-deſſus, ne peut, ainſi que nous l'avons déjà dit, être employée qu'à comparer les réſiſtances entre elles : mais pour donner la réſiſtance abſolue, il faudroit avoir égard à beaucoup de choſes ſur leſquelles la théorie ne paroît pas avoir encore aſſez de données.

L'on ne peut guère douter que, lorſqu'un fluide en mouvement choque un corps en repos, les parties de ce fluide, obligées de ſe détourner pour s'échapper, ne changent leur vîteſſe dans le voiſinage de la ſurface de ce corps. Cette circonſtance doit entrer pour beaucoup dans l'action du fluide ſur le corps. Mais où doit commencer la déviation des filets du fluide ? Juſqu'à quelle diſtance les filets ſe détournent-ils & s'accélèrent-ils de part & d'autre du corps ? Suivant quelle loi s'accélèrent-ils ? &c. C'eſt ce qu'on ignore, & qu'on ignorera probablement encore long-temps.

Néanmoins en partant d'hypothèſes aſſez vraiſemblables ſur l'accélération des parties du fluide autour de la ſurface du corps. Newton a trouvé que le choc d'un fluide ſur une ſurface plane, eſt équivalent au poids du priſme de ce fluide qui auroit pour baſe, cette ſurface, & pour hauteur, celle d'où un corps peſant devroit tomber pour acquérir la vîteſſe avec laquelle le fluide ſe meut ; & les expériences qu'il a faites, confirment aſſez bien cette théorie.

Le choc de l'air, quoique fluide élaſtique, ſe trouve auſſi, d'après la théorie & les expériences de Newton, avoir la même meſure. Mais quoique dans la ſuppoſition dont nous avons parlé (377), il dût avoir une meſure double ; cependant ſi on a égard à ce que dans le mouvement d'un corps dans l'air, les couches voiſines de la partie antérieure du corps ſe condenſent juſqu'à une certaine diſtance, on verra que la quantité abſolue de mouvement qu'elles peuvent faire perdre, ne doit pas ſe meſurer comme dans le cas où chaque couche ſeroit iſolée.

381. Quoique, d'après les expériences de M. Bouguer, de M. Mariotte & de M. le chevalier de Borda, il paroiſſe que cette théorie de Newton ne ſoit pas parfaitement conforme à l'expérience, néanmoins comme elle eſt celle qui s'en écarte le moins, c'eſt à elle que nous nous arrêterons ; & nous prendrons pour meſure du choc abſolu d'un fluide indéfini ſur une ſurface plane, le poids d'un priſme de ce fluide, qui auroit pour baſe cette ſurface, & pour hauteur la hauteur dont un corps peſant devroit tomber pour acquérir la vîteſſe avec laquelle ſe fait le choc.

382. Mais ſi en général on ſuppoſe que la hauteur du priſme de fluide, dont le poids meſure la réſiſtance, ſoit à la hauteur $2h :: n : 1$, n étant un nombre à déterminer par l'expérience ; on aura cette hauteur $= 2nh$, & par conſéquent le poids de ce priſme $= 2nDShpdt$; on aura donc $R = 2nDShpdt$; en ſorte que d'après Newton, par exemple, on auroit $n = \frac{1}{2}$. Et puiſque $VV = 2ph$, on aura auſſi $R = nDSV^2dt$.

REMARQUE I.

383. Les loix que nous venons d'établir, concernant le choc direct des fluides, nous apprennent donc que ce choc eſt proportionnel à la denſité du fluide, multipliée par l'étendue de la ſurface choquée, & par le quarré de la vîteſſe avec laquelle ſe fait le choc.

L'expérience confirme aſſez exactement la loi des réſiſtances proportionnelles au quarré de la vîteſſe. Mais des expériences faites avec ſoin par M. le chevalier de Borda, nous apprennent que les réſiſtances ne ſont pas bien exactement proportionnelles aux ſurfaces ni à la denſité. A la vérité, la théorie & l'expérience s'écartent beaucoup moins l'une de l'autre ſur ces deux points, que ſur la meſure abſolue de la réſiſtance; mais il n'en réſulte pas moins, qu'on ne doit regarder ces loix que comme des approximations aux véritables règles qui reſtent encore à trouver.

REMARQUE II.

384. L'on voit donc qu'il n'en eſt pas de l'impulſion d'un fluide ſur la ſurface d'un ſolide, ou de la réſiſtance qu'un mobile éprouve dans un fluide, comme de l'impulſion d'un corps d'un volume fini ſur un corps d'un volume fini. Celle ci ne peut (360) en aucune manière, être comparée au poids des corps, au lieu que la réſiſtance des fluides peut y être comparée.

La raiſon de cette différence, eſt que dans le choc d'un corps de volume fini ſur un corps de volume fini, il ſe fait dans un inſtant, un changement de vîteſſe fini. Au lieu que lorſqu'un corps ſe meut avec une

vîteſſe finie dans un fluide ; comme il ne décrit dans un inſtant qu'un eſpace infiniment petit, la quantité de matière qu'il déplace ou qu'il choque, ne peut être qu'infiniment petite ; il ne perd donc à chaque inſtant qu'une partie infiniment petite de ſa vîteſſe. La perte de mouvement qu'il éprouve, eſt donc comparable à celle que la peſanteur peut faire naître ou détruire à chaque inſtant dans les corps.

385. De-là on peut conclure que le choc entre deux corps plongés dans un milieu réſiſtant, ſe fait, s'il eſt inſtantané, comme dans un milieu libre ; c'eſt-à-dire que la vîteſſe avec laquelle le choquant atteint le choqué, ſe partage entre les deux corps, comme s'ils étoient dans un milieu non réſiſtant.

Par conſéquent, pour le dire en paſſant, lorſque le mouton $A\,B$ (*fig.* 7) tombe ſur le pilot $C\,D$, la vîteſſe qu'il a acquiſe par ſa chûte $O\,C$ (laquelle ſe détermine par ce qui a été dit (173)) ſe partage avec le pilot $C\,D$ ſuivant les règles données (352) ; c'eſt-à-dire, que celui-ci commence ſon enfoncement avec une vîteſſe $= \frac{M\,V}{M+m}$, V étant la vîteſſe acquiſe par la chute du mouton, M la maſſe du mouton, & m celle du pilot.

Si le terrein dans lequel le pilot eſt enfoncé, étoit de nature à réſiſter également par-tout, c'eſt-à-dire, tel que la diminution de vîteſſe qu'il occaſionne pendant que le pilot s'enfonce d'une quantité infiniment petite, fût proportionnelle à l'eſpace infiniment petit, décrit pendant cet inſtant ; alors la ſomme totale des réſiſtances éprouvées ſeroit proportionnelle à l'enfoncement total,

Ainſi les différens enfoncemens, que le mouton occaſionneroit à chaque chûte, ſeroient proportionnels à la réſiſtance totale, & par conſéquent à la quantité de mouvement conſumée, c'eſt-à-dire, à MV, V étant la vîteſſe du mouton & M ſa maſſe. Or V (172) étant proportionnel à la racine quarrée de la hauteur d'où le mouton eſt tombé, on en concluroit que les enfoncemens ſucceſſifs, faits par un même mouton, ſont comme les racines quarrées des hauteurs des chutes du mouton; & c'eſt ainſi que M. Belidor penſoit qu'on devoit eſtimer les enfoncemens du pilot dans un terrein homogène.

Mais on ſent aſſez combien, même dans un terrein homogène, il eſt difficile d'admettre que la réſiſtance eſt proportionnelle à la quantité de l'enfoncement inſtantané; ſi cette réſiſtance ne dépendoit que de l'inertie des molécules de terre qu'il faut déplacer, elle ſeroit (375) proportionnelle au quarré de la vîteſſe. Mais il y a grande apparence que cette réſiſtance tient à une cauſe qui influe beaucoup plus que l'inertie; c'eſt la ténacité des parties.

Il paroît très-difficile de déterminer par le raiſonnement ſeul quelle loi ſuit cette réſiſtance dans les terreins homogènes. Mais l'expérience paroît prononcer ſur ce point d'une manière ſuffiſante pour la pratique. L'expérience a fait voir que les enfoncemens faits dans la terre glaiſe par un même corps tombé de différentes hauteurs, ſont proportionnels à ces hauteurs, & par conſéquent au quarré de la vîteſſe avec laquelle l'enfoncement commence. Or les eſpaces décrits ne ſont proportionnels aux quarrés des vîteſſe (167) qu'autant que la force qui accélère ou retarde le mouvement, eſt

conſtante. L'expérience indique donc que la réſiſtance, dont il s'agit ici, eſt conſtante ; c'eſt à-dire, qu'à chaque inſtant égal de l'enfoncement, il y a une même quantité de mouvement d'abſorbée.

En admettant donc cette loi donnée par l'expérience, puiſque la vîteſſe avec laquelle l'enfoncement commence, eſt $\frac{MV}{M+m}$, l'enfoncement ſera donc proportionnel à $\frac{M^2V^2}{(M+m)^2}$; & ſi h eſt la hauteur d'où le mouton eſt tombé, puiſque (176) $2ph = V^2$, l'enfoncement ſera proportionnel à $\frac{2pM^2h}{(M+m)^2}$, ou à cauſe que p eſt toujours la même, & que M & m ſont les mêmes pour un même mouton & un même pilot, l'enfoncement ſera proportionnel à h, c'eſt-à-dire, à la hauteur de la chute du mouton.

Mais ſi on veut comparer les enfoncemens pour différens moutons & différens pilots enfoncés dans un terrein de même nature. Alors les effets doivent être, non-ſeulement comme les quarrés des vîteſſes, mais comme ces quarrés multipliés par les maſſes animées de ces vîteſſes, c'eſt à-dire, que l'enfoncement ſera proportionnel à $\frac{M^2V^2}{(M+m)^2} \times (M+m)$ ou proportionnel à $\frac{M^2V^2}{M+m}$ ou à $\frac{2pM^2h}{M+m}$ ou ſimplement à $\frac{M^2h}{M+m}$. D'où l'on voit qu'à chutes égales de deux moutons, les enfoncemens augmentent dans un rapport plus grand que celui de la maſſe du mouton.

De la réſiſtance ſur les ſurfaces planes obliques.

386. Paſſons à la réſiſtance ſur les ſurfaces qui ſe préſentent obliquement ; & pour plus de ſimplicité, ſuppoſons que c'eſt le fluide qui ſe meut.

Concevons un corps tel que le repréſente la *fig.* 8 ; c'eſt-à-dire, dont les faces planes *EFGL*, *AELD*, *AEFB*, ſoient perpendiculaires entre elles ; & dont les trois autres faces planes aient telle grandeur & telle inclinaiſon que l'on voudra, de manière cependant qu'il n'y ait que la face *ABCD* qui ſoit expoſée au choc du fluide que je ſuppoſe ſe mouvoir ſuivant *Tg* parallèle à *AE*, ou perpendiculaire à *EFGL*. Imaginons qu'on élève ſur le plan *ABCD*, la perpendiculaire *gR'*, & que par cette ligne & la ligne *gT*, on faſſe paſſer un plan. Ce plan ſera perpendiculaire aux deux plans *ABCD*, *EFGL* ; & ſi on le conçoit prolongé, il formera dans le corps, une ſection *MHIN* inclinée aux deux plans *AELD*, *AEFB*. De plus, comme il paſſe par la droite *gT* qui eſt la direction du fluide, toutes les particules de fluide arrivent ſur la ſurface *ABCD* ſuivant des directions parallèles à la

ſection *MHIN*; en ſorte que ſi on imagine le corps coupé par pluſieurs plans parallèles à *MHIN*, on pourra dire de chaque ſection, ce que nous allons dire de celle-ci.

Soit donc *p* (*fig. 9*) une particule qui arrive à la ſurface actuellement repréſentée par *MN*. Que la direction, ainſi que la vîteſſe *V* de cette particule, ſoient repréſentées par *pG*. Si ſur cette ligne comme diagonale, on forme le parallélogramme *pKGL*, dont le côté *pK* ſoit ſur *MN*, & dont le côté *pL* ſoit perpendiculaire à *MN*; & qu'à l'inſtant où cette particule arrive, on conçoive ſa vîteſſe *pG*, compoſée de deux autres, l'une *pK* dirigée ſuivant *MN*, l'autre *pL* perpendiculaire à cette même ſurface; il eſt clair que cette particule n'agit ſur le corps, qu'en vertu de la vîteſſe qu'elle a ſuivant *pL*; car en vertu de ſa vîteſſe ſuivant *pK*, elle ne peut que ſe mouvoir le long de la ſurface, que nous ſuppoſons parfaitement unie & ſans frottement, & à laquelle, par conſéquent, la particule *p* ne peut donner de mouvement. Ainſi le choc de la particule *p* ſe fait avec une quantité de mouvement exprimée par $p \times p\,L$. Et comme les autres particules qui arrivent en même temps ſur les autres points de la ſurface, ſont ſuppoſées avoir toutes la même vîteſſe, & des directions parallèles; ſi l'on conçoit

pour chacune, une décompoſition ſemblable, elles auront chacune, perpendiculairement à la ſurface, la même vîteſſe pL; en ſorte que ſi l'on nomme m, la ſomme de leurs maſſes, la quantité de mouvement qui paſſera dans le corps, perpendiculairement à la ſurface, ſera $m \times pL$.

Pour juger, à préſent, de la quantité de mouvement qui paſſera dans le temps infiniment petit dt, il faut déterminer le nombre des lames de fluide qui arriveront à la ſurface pendant ce même temps dt. Or ce nombre eſt évidemment le même que celui des lames que rencontreroit le corps, mu avec la vîteſſe V. Concevons donc que le corps ſe meuve pendant l'inſtant dt; en ſorte que la ſurface $ABCD$ (*fig.* 8), repréſentée (*fig.* 10) vienne en $abcd$, parallèlement à elle-même, le point g décrivant ſur gT la ligne infiniment petite gr. Il eſt clair en menant gs perpendiculaire ſur $abcd$, qu'il ne peut pas y avoir plus de lames de fluide entre $ABCD$ & $abcd$, que l'épaiſſeur d'une des particules n'eſt contenue de fois dans l'épaiſſeur gs; donc en nommant a l'épaiſſeur d'une des particules, $\frac{gs}{a}$ exprimera le nombre des lames; donc $m \times pL \times \frac{gs}{a}$, exprimera la quantité de mouvement qui paſſe

dans le corps pendant l'inſtant dt, & qui eſt dirigée perpendiculairement à la ſurface $ABCD$.

Mais puiſque la maſſe m de la première lame eſt égale au volume de cette lame, multiplié par ſa denſité ; ſi l'on nomme S la ſurface $ABCD$ & D la denſité du fluide, on aura $m = DSa$; donc la quantité de mouvement qui paſſe dans le corps, eſt $D \times S \times pL \times gs$. Il ne s'agit donc plus que de déterminer pL & gs.

Or ſi l'on nomme i l'angle $Tg\,M$ (*fig.* 8) que la direction du mouvement de chaque particule, fait avec la ſurface (angle qu'on appelle *angle d'incidence*), lequel eſt le méme que MpO (*fig.* 9) qui eſt égal à GpK; le triangle rectangle GpK donnera $1 : pG :: \text{ſin. } i : GK$ ou pL; donc $pL = pG \text{ ſin. } i = V \text{ ſin. } i$, puiſque PG marque la vîteſſe.

A l'égard de gs (*fig.* 10); ſi l'on joint les deux points r & s, le triangle grs ſera rectangle en s, puiſque gR' ou gs eſt perpendiculaire au plan $abcd$ dans lequel ſe trouve rs; & l'angle grs ſera égal à l'angle $Tg\,M$ de la *fig.* 8; c'eſt-à-dire, ſera égal à i. On aura donc $1 : \text{ſin. } i :: gr : gs$; donc $gs = gr \text{ ſin. } i$; ou bien, parce que gr étant l'eſpace décrit avec la vîteſſe V pendant le temps dt, ce qui donne $gs = V\,dt$, on aura $gs = V\,dt \text{ ſin. } i$.

Mettant donc ces valeurs de pL & de gs, dans $D \times S \times pL \times gs$, on aura, en nommant R' cette réſiſtance ou ce choc, $R' = DSV^2\,dt$ ſin.$^2\,i$; ou plus généralement, en vertu de l'obſervation faite (382), $R' = n\,DSV^2\,dt$ ſin.$^2\,i$.

387. Remarquons actuellement, que pour la réſiſtance, dans le cas où la ſurface ſe préſente perpendiculairement, nous avons (382) trouvé $R = n\,DSV^2\,dt$, on a donc..... $R : R' :: n\,DSV^2\,dt : n\,DSV^2\,dt$ ſin.$^2\,i :: 1 :$ ſin.$^2\,i :: 1^2 :$ ſin.$^2\,i$; donc, *toutes choſes d'ailleurs égales, la réſiſtance ou le choc direct d'un fluide, eſt à la réſiſtance oblique ſur la même ſurface, comme le quarré du rayon, eſt au quarré du ſinus d'incidence.* Ainſi l'une de ces réſiſtances peut toujours ſe conclure facilement de l'autre.

388. La réſiſtance que nous venons de calculer, ſe tranſmet perpendiculairement à la ſurface. Mais on a, le plus ſouvent, beſoin de connoître l'effet qui en réſulte dans une direction donnée. Voyons donc comment on y parvient.

Il eſt facile de voir (*fig.* 8) que puiſque cette force eſt dirigée perpendiculairement à la ſurface $ABCD$, laquelle eſt inclinée aux plans $AEFB$, $AELD$, $EFGL$, que nous avons ſuppoſés

perpendiculaires entre eux, elle tend à donner du mouvement au corps ſuivant des directions perpendiculaires à chacun de ces trois plans.

Pour déterminer chacun de ces trois efforts, il faudroit décompoſer l'effort R' perpendiculaire à $ABCD$, en trois autres, perpendiculaires à ces trois plans ; mais on peut y parvenir plus promptement en déterminant d'abord l'un quelconque de ces efforts, de la manière ſuivante ; & de celui-là nous conclurons les autres.

389. Propoſons-nous donc cette queſtion générale ; la force R' (*fig.* 12) appliquée perpendiculairement au plan $ABCD$, étant connue, déterminer quel eſt ſon effort ſuivant une direction perpendiculaire à un plan connu $EFGL$.

Par la direction gR' de la force R' on imaginera un plan qui ſoit tout-à-la-fois, perpendiculaire au plan $ABCD$, & au plan $EFGL$. Soient MI & HI les interſections de ce plan, avec $ABCD$ & $EFGL$; & TK la ſection commune de ces deux derniers ; MI & HI ſeront perpendiculaires à TK, & l'angle MIH, meſurera l'inclinaiſon des deux plans.

Si ſur la ligne $R'g$ prolongée, & priſe pour diagonale, on forme le parallélogramme $gROQ$ dans le plan MIH, & dont les côtés gQ & gR

gR ſoient; le premier, perpendiculaire; & le ſecond, parallèle au plan $EFGL$; on pourra ſubſtituer à la force R', les deux forces gR & gQ. Or gR étant parallèle au plan $EFGL$, ne tend à donner au plan $ABCD$, aucun mouvement pour s'approcher du plan $EFGL$, ni pour s'en éloigner, & ne peut que le faire mouvoir parallèlement à lui-même, ſa diſtance au plan $EFGL$ demeurant toujours la même; ainſi la ſeule tendance que $ABCD$ ait en vertu de la force R', pour ſe mouvoir perpendiculairement à $EFGL$, eſt gQ. Voyons donc quelle eſt la valeur de gQ.

Or par le principe de la décompoſition des forces, on a (en nommant Q la force gQ) $R' : Q :: gO : gQ$. Mais ſi l'on prolonge gQ juſqu'à ce qu'elle rencontre HI en S, on verra facilement que les deux triangles rectangles OgQ, gSI ſont ſemblables; parce qu'outre l'angle droit en Q & en S, les deux angles OgQ & gIS ſont égaux, comme étant complémens du même angle SgI. On a donc $gO : gQ :: Ig : IS$; donc $R' : Q :: Ig : IS$. Mais le triangle rectangle gSI donne $Ig : IS :: 1 : \text{ſin. } IgS :: 1 : \text{cof. } SIg$; donc enfin $R' : Q :: 1 : \text{cof. } SIg$; c'eſt-à-dire, que *l'effort abſolu de la force* R' *perpendiculaire au plan* ABCD, *eſt à celui qui en réſulte ſuivant une direction perpendiculaire à un autre plan quelconque* EFGL, *comme le*

rayon eſt au coſinus de l'inclinaiſon de ces deux plans.

390. Quant à l'effort gR qui eſt parallèle à IH, c'eſt de lui que réſultent les deux efforts perpendiculaires au plan $AEFB$ & au plan $AELD$; enſorte que pour avoir ces deux efforts, il faudroit, ainſi que nous l'avons déja obſervé, décompoſer l'effort gR, en deux autres qui fuſſent perpendiculaires à ces deux plans perpendiculaires entre eux & au plan $EFGL$. Mais il eſt facile d'appercevoir que les trois efforts dans leſquels la force R' ſera alors décompoſée, étant perpendiculaires entre eux, aucun des trois ne peut contribuer à l'effet des deux autres; donc chacun peut être déterminé comme nous venons de le faire, c'eſt-à-dire, en décompoſant ſimplement la force R' en deux autres, l'une perpendiculaire, & l'autre parallèle au plan dont il s'agit. De ſorte que la force R' eſt à chacun des trois efforts qu'elle tend à faire perpendiculairement aux plans $EFGL$, $AEFB$, $AELD$, perpendiculaires entre eux, comme le rayon eſt au coſinus de l'inclinaiſon du plan $ABCD$ ſur chacun de ces trois plans.

391. Voilà donc le rapport de ces trois efforts, fixé. Mais pour l'uſage que nous voulons en faire, il faut le traduire en un autre.

Dans cette vue, ſoit $ABCD$ (*fig.* 11) une

ſurface plane quelconque. Concevons que de tous ſes points, on ait mené des perpendiculaires ſur un plan quelconque $A'B'FE$ qui rencontre le plan $ABCD$ dans la droite EF. Ces perpendiculaires formeront ſur le plan $A'B'FE$ une ſurface $A'B'C'D'$ qu'on appelle la *Projection* de $ABCD$, & qui ſera à celle-ci, comme le coſinus de l'inclinaiſon des deux plans, eſt au rayon.

En effet, ſi l'on conçoit dans le plan $ABCD$, deux droites MNP, mnp, infiniment proches l'une de l'autre, & perpendiculaires à l'interſection commune FE; & qu'on ſe repréſente en même-temps, leurs projections $M'N'P$, $m'n'p$; il eſt facile de voir, qu'à cauſe de la hauteur commune Pp, les deux ſurfaces $Mmp P$, $M'm'p P$, ſont entr'elles comme $MP : M'P$. Par la même raiſon, les ſurfaces $Nnp P$, $N'n'p P$, ſont entr'elles : : $NP : N'P$, ou (à cauſe des parallèles MM', NN') : : $MP : M'P$; donc auſſi les ſurfaces $MmnN$, $M'm'n'N$ ſont entr'elles : : $MP : M'P$. Or le triangle rectangle $MM'P$ donne $MP : M'P$: : 1 : ſin. PMM'; donc puiſqu'on peut toujours conſidérer les deux ſurfaces comme compoſées d'un même nombre de petits trapèzes correſpondans, tels que $MmnN$, $M'm'n'N'$, leſquels ſeront toujours l'un à l'autre : : 1 : ſin.

PMM', on peut dire, généralement, que la ſurface plane quelconque $ABCD$. eſt à celle de ſa projection : : 1 : ſin. PMM'. Or, puiſque les lignes MP, ſont perpendiculaires à la ſection commune EF, l'angle MPM' qu'elles forment, meſure l'inclinaiſon des deux plans $ABCD$, $A'B'C'D'$; & à cauſe du triangle rectangle MPM', l'angle MPM' eſt le complément de cette inclinaiſon; donc en général, *ſi l'on projette ſur un plan quelconque, une ſurface plane quelconque, la ſurface projetée eſt à celle de ſa projection, comme le rayon eſt au coſinus de l'inclinaiſon de ces deux plans.*

392. Concluons donc de-là, que puiſque (390) lorſqu'on décompoſe la force R' (*fig.* 12) en trois autres, perpendiculaires à trois plans connus & perpendiculaires entr'eux, cette force eſt à chacune de ſes compoſantes, comme le rayon eſt au coſinus de l'angle que fait le plan $ABCD$, avec celui auquel cette compoſante eſt perpendiculaire; concluons, dis-je, que ſi l'on nomme r, r', r'', les effets que le choc R' d'un fluide, ſur $ABCD$, produit dans le ſens perpendiculaire à chacun des trois plans $EFGL$, $AEFB$, $AELD$; & ſi l'on nomme s, s', s'', les ſurfaces que l'on auroit en projetant ſur chacun de ces trois plans la ſurface

$ABCD$ que nous avons appellée S; on aura $R' : r : r' : r'' :: S : s : s' : s''$; donc puiſque nous avons trouvé $R' = nDSV^2 dt \text{ ſin.}^2 i$; ſi de cette ſuite de rapports on tire les trois proportions $R : r :: S : s$; $R' : r' :: S : s'$; $R' r'' :: S : s''$; & que l'on mette pour R' ſa valeur, on aura $r = nDsV^2 dt \text{ ſin.}^2 i$, $r' = nDs'V^2 dt \text{ ſin.}^2 i$, $r'' = nDs''V^2 dt \text{ ſin.}^2 i$.

C'eſt-à-dire, que *lorſqu'une ſurface plane quelconque* ABCD *eſt expoſée au choc d'un fluide, ſi l'on veut ſavoir l'effet que ce choc produit, ſuivant une direction donnée; il faut imaginer cette ſurface projetée ſur un plan auquel cette direction ſeroit perpendiculaire; & ayant déterminé par ce qui a été dit* (382), *le choc que cette projection éprouveroit, ſi elle étoit mue perpendiculairement, on le multipliera par le quarré du ſinus d'incidence du fluide ſur la véritable ſurface.*

393. On pourra donc, par ces principes, déterminer les efforts que le choc ou la réſiſtance des fluides, tend à produire dans un corps, ſuivant trois directions perpendiculaires entr'elles, ſoit que ce corps préſente pluſieurs ſurfaces planes différemment inclinées, ſoit qu'il préſente une ſurface courbe; car dans ce dernier cas, on peut toujours imaginer cette ſurface décompoſée en une infinité de petites ſurfaces planes.

De la réſiſtance qu'éprouve un Solide de révolution, mu ſuivant ſon axe.

394. Dans les corps engendrés par la rotation d'une ſurface autour d'une ligne droite, c'eſt-à-dire dans tous les ſolides de révolution qui ſeroient mus ſuivant la direction de leur axe, il eſt facile de voir que ſi on conçoit leur ſurface partagée en zônes par des plans infiniment voiſins & perpendiculaires à l'axe, la réſiſtance ſur toute l'étendue de la ſurface de la zône ſe réduira à un effort unique, dirigé ſuivant l'axe de révolution; parce que ſi on conçoit par l'axe deux plans perpendiculaires entr'eux, & que l'on cherche comme ci-deſſus les efforts perpendiculaires à ces plans qui réſultent de l'impulſion ſur chaque partie d'un même zône, on verra facilement, à cauſe de la figure régulière de la zône, que tous les efforts perpendiculaires à chacun de ces deux plans ſe détruiront.

Quant aux efforts parallèles à l'axe, qui réſultent pareillement des impulſions faites ſur les différentes parties d'une même zône, il eſt facile d'après ce qui précède, de voir qu'ils ſeront tous égaux, & également diſtribués autour de l'axe; donc il n'en réſultera qu'un ſeul effort, lequel ſera dirigé ſuivant l'axe.

395. Pour trouver la valeur de cet effort, concevons que AMR (*fig.* 13) eſt la courbe génératrice du ſolide; enſorte que Mm eſt le côté générateur de la zône. Il eſt facile de voir que toutes les parties de la ſurface de la zône ſont également inclinées ſur l'axe AB; & que leur inclinaiſon commune eſt meſurée par l'angle Mmr que le côté Mm de la courbe fait avec l'ordonnée pm. Ainſi l'angle d'incidence que (386) nous avons appellé i eſt $= rMm$. Or en nommant AP, x; PM, y; on a $Mm : rm$ ou $ds : dy :: 1 :$ ſin. rMm; donc ſin. rMm ou ſin. $i = \frac{dy}{ds}$.

De plus, il eſt facile de voir que ſi on projette la zône engendrée par Mm ſur un plan perpendiculaire à AB, la projection (*fig.* 14) ſera une couronne $MrqomQ$, qui aura pour largeur Mr & pour rayon PM, des lignes égales à Mr & PM dans la *figure* 13; donc puiſque la ſurface de cette couronne eſt évidemment $= Mr \times$ cir. PM; la projection de la zône ſera $= dy \times$ cir. y; ou (en repréſentant par $r : c$, le rapport du rayon à la circonférence) ſera $= \frac{cy\,dy}{r}$; donc (392) l'effort ſuivant l'axe, ou la réſiſtance ſuivant l'axe, réſultante de l'impulſion ſur une zône, ſera.... $2DV^2dt \times \frac{cy\,dy}{r} \times \frac{dy^2}{ds^2}$ ou $\frac{nDc}{r} V^2 dt \times \frac{dy^3}{ds^2}$.

& par conſéquent la réſiſtance totale réſultante de l'impulſion ſur toute la ſurface du ſolide, ſera... $\int \frac{nDc}{r} V^2 dt \times \frac{y dy^3}{ds^2}$ ou $\frac{nDc}{r} V^2 dt \int \frac{y dy^3}{ds^2}$; car il n'y a de variable ici que ce qui dépend de la figure du ſolide.

Telle eſt la formule pour calculer la réſiſtance qu'éprouvent les ſolides de révolution, lorſqu'ils ſont mus ſuivant leur axe.

396. Appliquons cette formule à la ſphère qui eſt le projectile le plus en uſage dans l'Artillerie.

L'équation du cercle AMB (*fig.* 15) générateur de la ſphère, eſt $yy = ax - xx$ (*Alg.* 219) en nommant AP, x; AB, a; & PM, y. Donc $y dy = \frac{1}{2} a dx - x dx$. D'ailleurs, en tirant le rayon MC, les triangles ſemblables Mmr, MPC, donnent $Mm : mr :: MC : CP$ ou $ds : dy :: \frac{1}{2} a : \frac{1}{2} a - x$; donc $\frac{dy}{ds} = \frac{\frac{1}{2} a - x}{\frac{1}{2} a}$; donc $\frac{y dy^3}{ds^2} = \frac{(\frac{1}{2} a - x)^3}{\frac{1}{4} a^4} dx$; donc (66) $\int \frac{y dy^3}{ds^2} = C - \frac{(\frac{1}{2} a - x)^4}{a^2}$. Or lorſque $x = 0$, l'intégrale doit être 0; donc $C = \frac{1}{16} a^2$; donc $\int \frac{y dy^3}{ds^2} = \frac{1}{16} a^2 - \frac{(\frac{1}{2} a - x)^4}{a^2}$.

Pour avoir la valeur complette de $\int \frac{y dy^3}{ds^2}$, il faut remarquer que le corps étant mu ſuivant BA, il n'y a que l'hémiſphère antérieur DAE qui ſoit expoſé au choc; par

conſéquent on ne doit prendre la valeur de $\int \frac{y\,dy^3}{ds^2}$ que depuis A juſqu'en C; c'eſt-à-dire qu'il faut dans l'intégrale, faire $x = \frac{1}{2}a$; on aura donc $\int \frac{y\,dy^3}{ds^2} = \frac{1}{16}a^2$; donc la réſiſtance, qui a pour expreſſion $\frac{nDc}{r} V^2\,dt$.....

$\int \frac{y\,dy^3}{ds^2}$, deviendra $nDV^2\,dt \times \frac{ca^2}{16r}$.

Mais la réſiſtance qu'éprouveroit le grand cercle DE mu perpendiculairement, ſeroit (382) $nDV^2\,dt \times \frac{ca^2}{8r}$, puiſque la ſurface de ce cercle eſt $\frac{ca^2}{8r}$; donc la *réſiſtance qu'éprouve la ſphère, eſt moitié de celle qu'éprouveroit ſon grand cercle.*

Du mouvement rectiligne des Corps dans les milieux réſiſtans.

397. La réſiſtance que les milieux oppoſent au mouvement des corps, peut donc, en général, produire deux effets. Le premier eſt de changer la direction du mouvement, ſi la direction ſuivant laquelle agit la réſultante de toutes les impulſions faites ſur les parties de la ſurface expoſée au choc, n'eſt pas ſur une même ligne droite avec la direction du mouvement actuel du corps. Le ſecond eſt d'altérer la vîteſſe du mobile.

Comme nous n'examinerons que les ſolides dont

les parties ſont ſymétriquement placées à l'égard de la direction du mouvement, leſquels par cette figure ne peuvent éprouver de déviation dans la direction de leur mouvement, nous n'enviſagerons ici le mouvement des corps dans les milieux réſiſtans que par rapport à la perte de vîteſſe qu'ils y éprouvent. Nous commencerons par examiner le mouvement des corps ſans peſanteur, ou, ce qui revient au même, celui des corps mus ſur un plan horizontal ſans frottement, en vertu d'une impulſion donnée.

398. Soit M la maſſe du mobile; u ſa vîteſſe au bout d'un temps quelconque t; s la ſurface plane qui, mue directement, éprouveroit la même réſiſtance qu'éprouve la ſurface du mobile actuel; D la denſité du fluide; conformément à l'obſervation faite (382), on aura $nDsu^2dt$ pour la quantité de mouvement que le mobile perd à chaque inſtant dt; & par conſéquent (158) $\frac{nDsu^2dt}{M}$ ſera le degré de vîteſſe qu'il perd pendant ce même inſtant, ou la différence entre les vîteſſes du mobile dans deux inſtans conſécutifs. On aura donc $\frac{nDsu^2dt}{M} = -du$; donnant (21) à du le ſigne —, parce que t croiſſant, u diminue.

Pour intégrer cette équation, il faut d'abord

diviſer par u^2; ce qui donne $\frac{nDsdt}{M} = -\frac{du}{u^2}$, dont l'intégrale (60) eſt $\frac{nDst}{M} = C + \frac{1}{u}$.

La conſtante C doit être déterminée par cette condition, que ſi V marque la vîteſſe qui a été imprimée au mobile au commencement du mouvement, on ait $u = V$ lorſque $t = 0$. On a donc $0 = C + \frac{1}{V}$; d'où $C = -\frac{1}{V}$. Donc $\frac{1}{u} - \frac{1}{V} = \frac{nDst}{M}$; équation d'où l'on tirera facilement la valeur de u au bout d'un temps quelconque t.

Pour donner un exemple de la manière d'employer les quantités qui entrent dans cette équation, ſuppoſons un cube d'ivoire ayant un pouce de côté, mu dans l'eau ſur le plan horizontal AB (*fig.* 16), & préſentant perpendiculairement ſa face CD. Que ſa vîteſſe initiale ait été de 50 pieds par ſeconde; on demande à quoi cette vîteſſe ſera réduite au bout d'une demi-ſeconde.

On a donc $t = \frac{1}{2}''$, $V = 50^{pi}$, $s = 1$ pouce quarré $= \frac{1}{144}$ de pied quarré; $n = \frac{1}{3}$ (382). A l'égard de M, il eſt égal au volume d'un pouce cube, multiplié par la denſité de l'ivoire, que je repréſente par D'; c'eſt-à-dire, que $M = \frac{1}{1728} D'$.

On a donc $\frac{1}{u} - \frac{1}{50} = \frac{\frac{1}{2} \times D \times \frac{1}{144} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{1728} D'} = \frac{3D}{D'}$.

Or d'après la Table donnée à la fin du *Tome III de ce Cours*, on a $D' : D :: 1{,}825 : 1$, ou $\frac{D}{D'} = \frac{1}{1{,}825} = 0{,}548$;

donc $\frac{1}{u} - \frac{1}{50} = 1{,}644$, ou $\frac{1}{u} = 1{,}664$; donc $u = \frac{1}{1{,}664} = 0{,}601$, c'eſt-à-dire, qu'au bout d'une demi-ſeconde, la vîteſſe n'eſt plus que d'environ $\frac{1}{5}$ de pied par ſeconde.

399. Déterminons préſentement l'eſpace décrit pendant ce même temps t.

Si nous repréſentons cet eſpace par x, nous aurons (179) $dx = u\,dt$; ſubſtituant pour u la valeur qu'on vient de trouver, on aura $dx = \frac{MV\,dt}{nDVst + M}$, équation dont l'intégrale (100) eſt $x = C' + \frac{M}{nDs} \log. (nDVst + M)$.

Pour déterminer la conſtante C', on remarquera que lorſque $t = 0$, on doit avoir $x = 0$; donc $0 = C' + \frac{M}{nDs} \log. M$; donc $x = \frac{M}{nds} \log. \left(\frac{nDVst}{M} + 1\right)$.

Ainſi, dans l'exemple précédent, on aura $x = \ldots\ldots$ $\frac{\frac{1}{1728} \times D'}{\frac{1}{2} \times D \times \frac{1}{144}} \log. \left(\frac{\frac{1}{2} \times D \times 50 \times \frac{1}{144} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{1728} \times D'} + 1\right)$ ou $x = \frac{1}{6} \frac{D'}{D} \log. \left(150 \frac{D}{D'} + 1\right)$; & puiſque $\frac{D}{D'} = 0{,}548$, ou $\frac{D'}{D} = 1{,}825$, on a $x = 0{,}304$ log. 82,20.

Le logarithme dont il s'agit ici, étant (88) le logarithme hyperbolique, je prends dans les Tables, le loga-

rithme ordinaire de 82,20 qui eſt 1,9148718, & l'ayant multiplié par 2,3025851, j'ai 4,4091530; donc $x = 0{,}304 \times 4{,}4091$, &c. ou enfin $x = 1^{pi.}\ 341 = 1^{pi.}\ 4^{po.}$ d'où l'on voit que ce cube a perdu plus de $\frac{42}{100}$ de ſa viteſſe, en décrivant 16 fois ſa longueur.

400. Paſſons au mouvement rectiligne des corps peſans, dans les milieux réſiſtans. Suppoſons d'abord que le corps deſcend. Son mouvement eſt retardé par deux cauſes; la première par la réſiſtance provenante du choc contre les parties du fluide; la ſeconde eſt dûe à ce qu'il perd (312) dans le fluide, une partie de ſon poids égale à celui du volume de fluide qu'il déplace.

En conſervant les dénominations employées juſqu'ici, la perte de mouvement qui réſulte de la première de ces deux cauſes, eſt (382) exprimée par $n D s u^2 d t$.

Quant à la ſeconde, il faut déterminer le poids du volume de fluide que le mobile occupe. Or à volume égal (160) les maſſes ſont comme les denſités; donc ſi on repréſente par D' la denſité du mobile, on aura $D' : D :: M :$ à la maſſe du fluide déplacé, laquelle ſera par conſéquent $\frac{MD}{D'}$. Donc p étant la viteſſe que la peſanteur donne en une ſeconde de temps à un corps libre, & par conſéquent $p d t$ celle qu'elle lui donne

en un inſtant dt, on aura $\frac{MD}{D'} pdt$ pour le poids du volume de fluide déplacé, ou pour la quantité de mouvement que le mobile perd en vertu de la ſeconde cauſe. Donc la perte totale de mouvement qu'il fait à chaque inſtant, eſt $\frac{MD}{D'} pdt + nDsu^2 dt$. Or la peſanteur lui donne à chaque inſtant la quantité de mouvement $Mpdt$; donc il ne ſe meut réellement qu'avec la quantité de mouvement $Mpdt = \frac{MD}{D'} pdt - nDsu^2 dt$; donc l'augmentation de vîteſſe qu'il reçoit à chaque inſtant, n'eſt que $\frac{Mpdt - \frac{MD}{D'} pdt - nDsu^2 dt}{M}$; ou $(1 - \frac{D}{D'}) pdt - \frac{nDsu^2}{M} dt$. On a donc $(1 - \frac{D}{D'}) pdt - \frac{nDsu^2}{M} dt = du$.

Faiſons pour ſimplifier $(1 - \frac{D}{D'}) p = g$, & $\frac{nDs}{M} = \frac{g}{k^2}$; nous aurons $gdt - \frac{gu^2}{k^2} dt = du$, ou $gdt = \frac{k^2 du}{k^2 - u^2}$.

Pour intégrer cette quantité, je la change (108 & 111) en $gdt = \frac{\frac{1}{2}k du}{k - u} + \frac{\frac{1}{2}k du}{k + u}$, dont l'intégrale (100) eſt $gt = C - \frac{1}{2}k \log.(k - u) + \frac{1}{2}k \log.(k + u)$.

Suppoſons, pour plus de ſimplicité, que le mobile n'a reçu aucune impulſion au commencement du mouvement. Alors la conſtante C doit être déterminée par la condition que lorſque $t = 0$, on ait $u = 0$. On a donc $0 = C - \frac{1}{2} k$ log. $k + \frac{1}{2} k$ log. k, c'eſt-à-dire, $C = 0$. Ainſi $gt = \frac{1}{2} k$ log. $\frac{k+u}{k-u}$, eſt l'équation qui donne la vîteſſe du mobile au bout d'un temps quelconque t.

401. Pour avoir l'eſpace décrit pendant ce temps t, nous prendrons l'équation $dx = u\,dt$ (179); en ſuppoſant l'eſpace décrit, repréſenté par x.

Il faut donc de l'équation précédente, déduire valeur de u, & la ſubſtituer dans celle-ci.

Or l'équation $gt = \frac{1}{2} k$ log. $\frac{k+u}{k-u}$, donne log. $\frac{k+u}{k-u} = \frac{2gt}{k}$, ou log. $\frac{k+u}{k-u} = \frac{2gt}{k}$ log. e, en repréſentant par e le nombre dont le logarithme eſt 1, ou enfin log. $\frac{k+u}{k-u} =$ log. $e^{\frac{2gt}{k}}$; donc $\frac{k+u}{k-u} = e^{\frac{2gt}{k}}$, & par conſéquent $u = \frac{k e^{\frac{2gt}{k}} - k}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}$; donc $dx =$

$\frac{e^{\frac{2gt}{k}}-1}{e^{\frac{2gt}{k}}+1} k\,dt$, équation que je change d'abord en cette autre $dx = \frac{k\,dt\,e^{\frac{2gt}{k}}}{e^{\frac{2gt}{k}}+1} - \frac{k\,dt}{e^{-\frac{2gt}{k}}+1}$, puis en cette autre $dx = \frac{k\,dt\,e^{\frac{2gt}{k}}}{e^{\frac{2gt}{k}}+1} - \frac{k\,dt\,e^{\frac{-2gt}{k}}}{1+e^{\frac{-2gt}{k}}}$.

Or, d'après ce qui a été dit (28 & 100), il eſt facile de voir que les deux termes du 2d membre, ſont chacun une différencielle logarithmique; & que par conſéquent l'intégrale eſt $x = C' + \frac{kk}{2g}\log.(e^{\frac{2gt}{k}}+1) + \frac{kk}{2g}\log.(e^{\frac{-2gt}{k}}+1)$, ou $x = C' + \frac{kk}{2g}\log.(e^{\frac{2gt}{k}}+1) + \frac{kk}{2g}\log.\left(\frac{e^{\frac{2gt}{k}}+1}{e^{\frac{2gt}{k}}}\right)$, ou $x = C' + \frac{kk}{2g}\log.\frac{(e^{\frac{2gt}{k}}+1)^2}{e^{\frac{2gt}{k}}}$, ou enfin $x = C' + \frac{kk}{g}\log.\left(\frac{e^{\frac{2gt}{k}}+1}{e^{\frac{gt}{k}}}\right)$.

Pour

Pour déterminer la conſtante C', nous remarquerons que lorſque $t = 0$, on doit avoir $x = 0$, puiſque le corps eſt ſuppoſé n'avoir reçu aucune impulſion au commencement. On a donc $0 = C' + \frac{kk}{g} \log. \frac{1+1}{1} = C' + \frac{kk}{g} \log. 2$; donc $C' = -\frac{kk}{g} \log. 2$; donc enfin $x = \frac{kk}{g} \log. \left(e^{\frac{\frac{2gt}{k}+1}{2e^{\frac{gt}{k}}}} \right)$.

C'eſt-là l'équation qui donnera l'eſpace x décrit après un temps quelconque t.

402. Paſſons au mouvement du corps lorſqu'il monte.

La peſanteur & la réſiſtance du milieu contribuent alors à diminuer la vîteſſe du mobile; mais la peſanteur dans ce cas-ci, comme dans le précédent, eſt diminuée, parce que le poids du mobile eſt diminué de celui du volume de fluide déplacé; ainſi la force qui retarde le mouvement, ſera $Mp\,dt - \frac{MD}{D'} p\,dt + nDsu^2\,dt$; donc la perte de vîteſſe qui en réſultera, ſera $p\,dt - \frac{D}{D'} p\,dt + \frac{nDsu^2\,dt}{M}$. On aura donc $(1 - \frac{D}{D'})\,p\,dt + \frac{nDsu^2\,dt}{M} = -du$.

Faiſons, comme ci-deſſus, $(1 - \frac{D}{D'})\,p = g$, & $\frac{nDs}{M} = \frac{g}{k^2}$. Nous aurons $g\,t\,d + \frac{g}{k^2}\,u^2\,dt = -du$; d'où l'on tire $g\,dt = \frac{-k^2\,du}{k^2+u^2}$.

Faiſons $u = k\zeta$; nous aurons $g\,dt = \frac{-k\,d\zeta}{1+\zeta\zeta}$ ou $\frac{-g\,dt}{k} = \frac{d\zeta}{1+\zeta\zeta}$. Or le ſecond membre de cette équation (86) exprime l'élément d'un arc-de-cercle, dont la tangente eſt ζ, & le rayon 1. Donc ζ eſt la tangente de l'arc qui eſt l'intégrale de ce ſecond membre, ou de ſa valeur exprimée par l'intégrale du premier. Donc $\zeta = -$ tang. $\left(\frac{gt}{k} + C\right) = \frac{u}{k}$; donc $u = -k$ tang. $\left(\frac{gt}{k} + C\right)$.

Pour déterminer la conſtante C, on obſervera que lorſque $t = 0$, u doit être égale à la vîteſſe avec laquelle le mobile a été lancé. Soit V cette dernière, on aura donc $V = -k$ tang. C; & par conſéquent tang. $C = -\frac{V}{k}$ ou $C =$ arc. tang. $\frac{-V}{k}$; c'eſt-à-dire, à l'arc qui a pour tangente $\frac{-V}{k}$. Donc ſi on appelle A l'arc qui a

pour tangente $\frac{V}{k}$, on aura $C = -A$. Donc $u = k$ tang. $\left(A - \frac{gt}{k}\right)$.

403. Pour avoir l'eſpace décrit, nous prendrons l'équation $dx = u\,dt$. Nous aurons donc $dx = k\,dt$ tang. $\left(A - \frac{gt}{k}\right) = \frac{k\,dt \text{ ſin.}\left(A - \frac{gt}{k}\right)}{\text{cof.}\left(A - \frac{gt}{k}\right)}$ (*Géom.* 22 & 27). Mais cette quantité eſt une différentielle logarithmique ; donc (100) on aura $x = C' + \frac{k^2}{g}$ log. cof. $\left(A - \frac{gt}{k}\right)$.

A l'égard de la conſtante C', elle doit être telle que $x = 0$, lorſque $t = 0$; on a donc $0 = C' + \frac{k^2}{g}$ log. cof. A ; donc $C' = \frac{-k^2}{g}$ log. cof. A ; donc enfin $x = \frac{k^2}{g}$ log. $\frac{\text{cof.}\left(A - \frac{gt}{k}\right)}{\text{cof. } A}$, équation qui donnera l'eſpace décrit au bout d'un temps quelconque t.

404. Pour ſavoir la hauteur totale à laquelle le corps s'élèvera en vertu de la vîteſſe donnée V, il faut, dans l'équation $u = k$ tang. $\left(A - \frac{gt}{k}\right)$ ſuppoſer $u = 0$, & par conſéquent $A - \frac{gt}{k} = 0$,

ce qui donne $x = \frac{k^2}{g} \log. \frac{\text{cos. } \delta^d}{\text{cos. } A} = \frac{k^2}{g} \log. \frac{1}{\text{cos. } A}$.

405. Voici quelques applications de cette théorie. Prenons pour exemple l'une des expériences faites par *Newton*, au mois de Juin 1710. *Newton* trouva, par expérience, qu'un globe de verre rempli d'air, de 4 po., + 6932 de diamètre, & du poids de 1 once, 0219 dans l'air (ces mesures & ces poids sont réduits à la mesure de Paris), étoit tombé de 106 pieds $\frac{1}{2}$ de hauteur, en 8″ $\frac{1}{5}$ de temps. Voyons donc si, dans 8″ $\frac{1}{5}$ un corps pesant doit, en vertu de la résistance de l'air, ne tomber que de 106 pi., 5.

Déterminons d'abord les quantité g & k. Nous avons fait $g = (1 - \frac{D}{D'})\, p$, dans laquelle $p = 30{,}2$.

Pour avoir le rapport $\frac{D}{D'}$ de la densité de l'air à celle du globe de verre, il faut calculer le poids d'un volume d'air égal à ce globe; & l'ayant ajouté au poids que ce globe a été trouvé avoir dans l'air, on aura le poids réel de ce globe, qui étant comparé au poids du même volume d'air, donnera le rapport des densités, puisqu'à volume égal les densités sont comme les poids (160).

Or le globe ayant 4 po., 6932 ou 0 pi., 3911 de diamètre, à un volume de 0,03134 de pied cube; & puisque la pesanteur de l'air est la 850e partie de celle de l'eau, celle-ci pesant 70 liv. ou 1120 onces le pied cube, un pied cube d'air pésera $\frac{1120}{850}$ ou $\frac{112}{85}$ d'once; donc un globe d'air de même diamètre que celui de l'expérience, pèse 0,0413 d'once. Donc puisque le globe de l'expérience a dû perdre dans l'air une partie de son poids, égale au poids du volume d'air qu'il a

déplacé, il s'enſuit que dans le vide, il auroit peſé 1 $^{pa.}$, 0632. Et puiſqu'un pareil volume d'air pèſe 0,0413, on a donc $D' : D :: 1{,}0632 : 0{,}0413 :: 10632 ; 413$; donc $\frac{D}{D'} = \frac{413}{10632} = 0{,}0388$. Donc $g = (1 - \frac{D}{D'})\, p$ $= (1 - 0{,}0388) \times 30{,}2 = 0{,}9612 \times 30{,}2 = 29{,}03$.

A l'égard de k, puiſque nous avons fait $\frac{n D s}{M} = \frac{g}{k^2}$, nous aurons $k^2 = \frac{g M}{n D s}$.

Or M eſt égale au volume du globe multiplié par ſa denſité D'; & comme ce volume a été trouvé ci-deſſus, $= 0{,}03134$, on a $M = 0{,}03134\, D'$; donc $k^2 = \frac{g \times 0{,}03134\, D'}{n s D}$.

Mais (382) nous avons $n = \frac{1}{3}$; & (396) s vaut la moitié de la ſurface d'un grand cercle du globe actuel; & cette ſurface eſt $= 0{,}12028$; donc $s = 0{,}06014$; donc $k^2 = \frac{0{,}03134}{\frac{1}{3} \times 0{,}06014} \times g \times \frac{D'}{D} = \frac{0{,}03134}{0{,}03007} \times 29{,}03 \times \frac{1}{0{,}0388}$ $= 779{,}53$; donc $k = 27{,}92$.

Nous avons donc $g = 29{,}03$ $k = 27{,}92$ & $t = 8'' \frac{1}{2}$.

Il ne s'agit donc plus que de ſubſtituer ces valeurs dans celle de x, c'eſt-à-dire, dans $x = \frac{k k}{g} \log. \left(\frac{\frac{2gt}{k} + 1}{2\, \frac{gt}{k}} \right)$.

Mais avant de faire cette ſubſtitution, rendons cette dernière formule un peu plus commode pour le calcul. Faiſons $e^{\frac{gt}{k}} = N$, nous aurons $e^{\frac{2gt}{k}} = N^2$, & par

conſéquent $x = \frac{kk}{g} \log. \frac{N^2 + 1}{2N}$.

Pour avoir N, l'équation $e^{\frac{gt}{k}} = N$ donne $\frac{gt}{k} \log. e = \log. N$, ou $\frac{gt}{k} = \log. N$; or ayant le logarithme de N, il ſera aiſé d'avoir N.

Cela poſé, nous aurons donc $\log. N = \frac{29,03 \times 8\frac{1}{3}}{27,92} = 8,52599$. Mais comme ce logarithme eſt hyperpolique, pour avoir le nombre qui lui répond, il faut le convertir en logarithme ordinaire (88) en le multipliant par 0,4342945; ce qui donne 3,7027895, qui dans les Tables répond à 5044. Donc $N = 5044$ à très-peu près.

Comme N^2 ſe trouve ici être un nombre aſſez grand, je vois que dans la quantité $\frac{N^2 + 1}{2N}$, je puis, ſans qu'il en réſulte d'erreur ſenſible, négliger le terme 1 vis-à-vis de N^2, & réduire par conſéquent la valeur de x à $x = \frac{kk}{g} \log. \frac{N^2}{2N} = \frac{kk}{g} \log \frac{N}{2} = \frac{779,53}{29,03} \log. 2522$.

Je prends donc (88) le logarithme hyperbolique de 2522 que je trouve être 7,8328075, & le multipliant par $\frac{779,53}{29,03}$, je trouve $x = 210,2$ qui ne diffère de l'expérience que de 3 pi, 7 environ.

Dans le même temps (174) ce mobile ſeroit deſcendu de 3015 pieds dans le vide.

406. A l'égard de la vîteſſe, nous avons vu (400) qu'elle avoit pour expreſſion $u = \frac{ke^{\frac{2gt}{k}} - k}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}$, c'eſt-à-

dire, qu'on a $u = \frac{kN^2 - k}{N^2 + 1}$. Subſtituant pour k & N leurs valeurs trouvées ci-deſſus, on trouvera. . . . . $u = \frac{[(5044)^2 - 1] \times 27,92}{(5044)^2 + 1} = 27,92$ à très-peu près.

407. L'expreſſion $u = \frac{ke^{\frac{2gt}{k}} - k}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}$, dans laquelle $e^{\frac{2gt}{k}}$ va toujours en croiſſant à meſure que t croît, fait voir qu'au bout d'un certain temps, la vîteſſe ne s'accélère plus qu'inſenſiblement. En effet, ſi on l'écrit ainſi . . . $u = k\left(\frac{e^{\frac{2gt}{k}} - 1}{e^{\frac{2gt}{k}} + 1}\right)$, on voit que cette valeur approche continuellement de celle-ci $u = \frac{ke^{\frac{2gt}{k}}}{e^{\frac{2gt}{k}}} = k$; en ſorte que les corps peſans qui tombent dans un milieu réſiſtant n'accélèrent pas continuellement leur vîteſſe comme dans le vide; cette vîteſſe ne peut jamais devenir plus grande que k, & quoique dans la rigueur ils n'atteignent cette vîteſſe qu'après un temps infini, néanmoins ils en diffèrent très-peu au bout d'un intervalle de temps aſſez court. On en voit une preuve frappante dans l'exemple que nous venons de donner (406), où le mobile a preſque atteint cette vîteſſe au bout de $8'' \frac{1}{5}$.

408. On peut encore déterminer d'une autre manière quelle eſt la plus grand vîteſſe que les corps puiſſent acquérir

en deſcendant dans un millieu réſiſtant. Dans l'équation $(1 - \frac{D}{D'})\, p\, dt - \frac{n D s u^2}{M}\, dt = du$, ſi on ſuppoſe $(1 - \frac{D}{D'})\, p\, dt - \frac{n D s u^2}{M}\, dt = 0$, il eſt clair qu'on aura $du = 0$; c'eſt-à-dire, que la viteſſe ceſſera de s'accélérer. Or l'équation $(1 - \frac{D}{D'})\, p\, dt - \frac{n D s u^2}{M}\, dt = 0$, donne $M p\, dt - \frac{M D}{D'} p\, dt = n D s u^2\, dt$, dont le premier membre exprime le poids du corps dans le fluide, & le deuxième exprime la réſiſtance actuelle. Donc le mouvement arrive à l'uniformité, lorſque la réſiſtance eſt égale au poids du corps dans le fluide ; ce qui d'ailleurs eſt évident.

De cette même équation, on conclud auſſi $u^2 = \frac{(M - \frac{M D}{D'})\, p}{n D s} = \frac{(1 - \frac{D}{D'})\, p}{\frac{n D s}{M}} = \frac{g}{k^2}$, ou $u = k$, comme ci-deſſus.

De la viteſſe que les projectiles peuvent recevoir par l'action d'un fluide élaſtique condenſé, tel que l'air ou la poudre enflammée.

409. La force que l'air condenſé dans un eſpace déterminé AB (*fig.* 17) exerce en ſe

dilatant contre un mobile ou projectile M, n'engendre point une vîteſſe finie dans un inſtant. Le débandement du reſſort ſe fait par degrés infiniment petits, dont la ſomme pendant un eſpace de temps fini, forme la vîteſſe finie avec laquelle le projectile eſt lancé.

410. Puiſque cette force agit par degrés infiniment petits, elle peut donc être comparée au poids des corps, & meſurée par conſéquent par un poids. Le poids, auquel nous la comparerons dans la queſtion préſente, eſt celui de l'atmoſphère, c'eſt-à-dire, celui d'une colonne d'air qui auroit pour baſe l'un des grands cercles du boulet M, & pour hauteur celle de l'atmoſphère; ce poids eſt connu (333).

Suppoſant donc que P ſoit une maſſe de même poids que cette colonne; p la vîteſſe que la peſanteur engendre en une ſeconde de temps dans un corps libre; $Ppdt$ ſera le poids de cette colonne; & ſi on repréſente par $1 : q$ le rapport de ce poids à celui qui doit meſurer la force du reſſort de l'air condenſé dans l'eſpace AB, on aura pour ce dernier poids, ou pour la meſure de la force du reſſort de l'air condenſé, la quantité $Ppq\,dt$.

Faiſons abſtraction de la peſanteur du mobile

M, c'eſt à-dire ſuppoſons que l'ame DA de la pièce eſt horizontale ; ſuppoſons auſſi que le mobile eſt de calibre, en ſorte qu'il ne laiſſe aucun vide, & cherchons avec quelle vîteſſe il ſortira de la pièce dans un eſpace libre.

Conſidérons-le lorſqu'il eſt parvenu en un point quelconque C de l'ame de la pièce. Puiſque la force du reſſort de l'air eſt en raiſon inverſe des eſpaces qu'il occupe (334), ſa force, lorſqu'il occupe l'eſpace AC, ſera à celle qu'il avoit lorſqu'il n'occupoit que AB, c'eſt-à-dire, à $Ppqdt :: AB : AC$; donc ſi on appelle F la force de l'air répandu dans AC, on aura $F = \frac{AB}{AC} \times pqPdt = \frac{pqPadt}{x}$ en nommant AB, a & AC, x.

Cette force ſeroit celle qui eſt employée à accélérer le mouvement du projectile au point C, ſi la preſſion de l'air extérieur n'avoit pas lieu ; mais celle-ci agiſſant en ſens contraire avec une force $= pPdt$, il s'enſuit que la force qui accélère réellement le mobile, n'eſt que $\frac{pqPadt}{x} - pPdt$; donc l'augmentation de vîteſſe que le mobile reçoit au point quelconque C, eſt $\frac{\frac{pqPadt}{x} - pPdt}{M}$, M étant la maſſe du mobile. Donc ſi on nomme u la

vîteſſe actuelle du mobile, du marquant l'accroiſſement de la vîteſſe, on aura $\frac{\frac{pqPadt}{x} - pPdt}{M} = du$, ou $\frac{pqPadt}{x} - pPdt = Mdu$.

Pour tirer de cette équation la valeur de u, il faut à la place de dt, mettre ſa valeur $\frac{dx}{u}$ (179), & l'on aura $\frac{pqPadx}{ux} - \frac{pPdx}{u} = Mdu$ ou $pqP\frac{adx}{x} - pPdx = Mudu$, dont l'intégrale eſt $pqPa$ log. $x - pPx + C = \frac{Mu^2}{2}$.

Pour déterminer la conſtante C, obſervons que, puiſque le débandement du reſſort de l'air eſt ſuppoſé ne commencer qu'au point B où $x = a$, l'équation précédente doit être telle, que faiſant $x = a$, on ait $u = 0$. On a donc $pqPa$ log. $a - pPa + C = 0$, & par conſéquent $C = pPa - pqPa$ log. a; donc $\frac{Mu^2}{2} = pqPa$ log. $\frac{x}{a} - pP(x - a)$. C'eſt-là l'équation qui donne la vîteſſe en un point quelconque C de la longueur de la pièce.

411. Par exemple, ſuppoſons un fuſil à vent dont l'ame ait 3 ^{pi} $\frac{1}{2}$ de longueur, chargé d'une balle de plomb de 16 à

la livre, & dont le diamètre eſt par conſéquent de $0^{pl.}$, 0524. Suppoſons que l'air condenſé y occupe 6 pouces, & que ſa denſité y ſoit à celle de l'air naturel : : 100 : 1. On demande quelle ſera ſa vîteſſe à la ſortie du fuſil.

Ici on a $a = 6^{po.} = \frac{1}{2}^{pl.}$, $x = 3^{pl.}\ \frac{1}{2}$, $M = \frac{1}{12}$, $q = 100$.

Pour avoir P, on ſe rappellera (333) que le poids de l'atmoſphère eſt égal à celui d'un cylindre d'eau de 32 pieds de hauteur. Ainſi, puiſque le grand cercle de la balle a $0^{pl.}$, 0524 de diamètre, ſa ſurface ſera de 0, 00216 de pied quarré; P ſera donc $= 0,00216 \times 32 \times 70^{lt}$; puiſque la peſanteur ſpécifique de l'eau eſt de 70^{lt}, on a donc $P = 4^{lt}\ \frac{5}{6}$ à peu près. D'ailleurs (172) on a $p = 30,2$. Subſtituant ces valeurs dans l'équation de la vîteſſe, on a $\frac{1}{12}\,u^2 = 100 \times 30,2 \times 4\ \frac{5}{6} \times \frac{1}{2}\ \log.\frac{3\ \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} - 30,2 \times 4\ \frac{5}{6} \times 3 = 7298\ \log.\ 7 - 437,9$. Or le logarithme ordinaire de 7 eſt 0,8450980; multipliant (88) par 2,30258509 pour le réduire en logarithme hyperbolique, on a 1,9459 en négligeant les autres décimales qui ſont ici ſuperflues. On a donc $\frac{1}{12}\,u^2 = 7298 \times 1,9459 - 437,9 = 13762$; donc $u = 664^{pl.}$, la balle s'échapperoit donc avec une vîteſſe de 664 pieds par ſeconde.

Si on demande quelle longueur il faut donner à la pièce pour qu'elle reçoive de la part de la charge, toute l'action qu'elle peut en recevoir; on remarquera que, lorſque l'action de la charge ceſſe, alors il n'y a plus aucune augmentation dans la vîteſſe, c'eſt-à-dire, que $du = 0$. Reprenant donc l'équation $\frac{pqPa\,dt}{x} - Pp\,dt =$

Mdu que nous avons eue ci-deſſus, & faiſant $du = 0$, nous en tirerons $\frac{qa}{x} - 1 = 0$, ou $x = qa$; c'eſt-à-dire, que la longueur de la pièce doit être à celle de la charge $:: q : 1$, ou comme le reſſort de l'air qui fait la charge, eſt à celui de l'air naturel.

412. Si l'on veut ſavoir quelle doit être la charge, ou combien l'air doit être condenſé pour que le projectile ait à la ſortie de la pièce, une vîteſſe donnée, l'équation $\frac{Mu^2}{2} = pqPa \log. \frac{x}{a} - pP(x - a)$ donne $q = \frac{pP(x-a)+\frac{1}{2}Mu^2}{pPa \log. \frac{x}{a}}$.

413. Le reſſort de l'air & la longueur de la pièce reſtant les mêmes, ſi on conçoit qu'on augmente le volume d'air qui alors eſt proportionnel à a, c'eſt-à-dire, ſi on augmente la charge, les degrés de vîteſſe communiqués au mobile à diſtance égale de la culaſſe, ſeront plus grands, puiſqu'en général la force du reſſort eſt proportionnelle à $\frac{a}{x}$. Mais comme la longueur de la charge eſt priſe ſur celle de la pièce, plus la charge aura de longueur, & moins il reſtera de l'eſpace dans

lequel le mobile reçoit l'action du fluide élaſtique. Il doit donc y avoir, pour une longueur donnée de la pièce, une longueur de charge, ou une charge qui donne la plus grande vîteſſe poſſible.

Pour la déterminer, il faut reprendre l'équation $\frac{Mu^2}{2} = pqPa \log. \frac{x}{a} - pP(x - a)$, la différencier en regardant u & a ſeuls comme variables, & égaler du à zéro. On aura donc $o = pqPda \log. \frac{x}{a} - pqPda + pPda$ ou $q \log. \frac{x}{a} = q - 1$; d'où l'on tire $\log. \frac{x}{a} = \frac{q-1}{q}$.

Ainſi dans l'exemple précédent où $q = 100$, & $x = 3_{pi},5$, on auroit $\log. \frac{3,5}{a} = \frac{99}{100} = 0,99$. Et comme ce nombre exprime le logarithme hyperbolique de $\frac{3,5}{a}$; pour connoître le nombre $\frac{3,5}{a}$ par le moyen des Tables, il faut multiplier 0,99 par 0,4342945, & l'on aura 0,4299515, qui répond à 2,7 ; donc $\frac{3,5}{a} = 2,7$; donc $a = \frac{3,5}{2,7} = 1,3$; c'eſt-à-dire, que la charge qui procurera la plus grande vîteſſe à la ſortie de la pièce, doit avoir $1^{pi.}\ 3^{po.}\ 7^{li.}$ de longueur. Et en calculant comme dans le même exemple, on trouvera que la vîteſſe de la balle ſeroit de 770 pieds par ſeconde.

414. Le fluide, que l'inflammation de la poudre dé-

veloppe dans les armes à feu, eſt un fluide élaſtique, dont la nature n'eſt pas encore parfaitement connue. Eſt-ce de l'air engagé dans les matières qui compoſent la poudre? eſt-ce l'eau de la cryſtalliſation du nitre, réduite en vapeurs? On ſait que l'air renfermé dans les corps, & qui paroît y entrer comme principe, y eſt dans un état de condenſation prodigieux. On ſait que l'eau réduite en vapeur, peut occuper des eſpaces juſqu'à 16000 fois auſſi grands que ceux qu'elle occuperoit dans ſon état naturel. Peut-être ces deux cauſes concourent-elles à la force de la poudre? Quoi qu'il en ſoit, la vîteſſe que les projectiles reçoivent par l'inflammation de la poudre, eſt l'effet du reſſort d'un fluide élaſtique; ſi ce reſſort eſt proportionnel à la denſité du fluide le mouvement qui en réſulte, peut être déterminé par les principes que nous venons d'expoſer.

Il faut cependant obſerver qu'on doit y faire entrer pluſieurs autres conſidérations que nous avons omiſes; 1°. le poids du boulet, lorſque la pièce n'eſt pas horizontale; 2°. la réſiſtance de l'air pendant que le boulet parcourt l'ame de la pièce; 3°. le *vent* du boulet, & la *lumière* du canon qui permettant à une partie du fluide élaſtique de s'échapper, diminuent d'autant l'action de ce fluide; 4°. l'inflammation ſucceſſive & non inſtantanée de la poudre, qui fait qu'une partie de la poudre eſt chaſſée hors de la pièce ſans avoir été enflammée; & ne doit par conſéquent pas entrer dans le calcul de l'effet. De ces conſidérations les deux premières qui ſont les moins importantes, ſont faciles à faire entrer dans le calcul. La troiſième, moins facile, peut cependant y être ſoumiſe; mais il n'y a pas aſſez de données pour tenir compte de la quatrième, c'eſt pourquoi nous ne pouſſe-

rons pas plus loin l'examen de cette queſtion. Au reſte, ſi quelques-unes de ces conſidérations ne permettent pas de déterminer rigoureuſement le rapport du reſſort de ce fluide élaſtique à celui de l'air naturel, on peut néanmoins en formant des hypothèſes plauſibles ſur l'influence de chacune, s'aſſurer que ce rapport eſt très-grand. C'eſt ainſi qu'on s'eſt aſſuré que la force de la poudre eſt plus de dix mille fois auſſi grande que celle du reſſort de l'air naturel.

415. Nous avons tacitement ſuppoſé dans la ſolution précédente, que la pièce *AD* étoit immobile, ou que le recul étoit inſenſible. La vîteſſe ne ſeroit pas la même ſi le recul étoit un peu conſidérable; c'eſt ce que nous allons faire voir.

De la force du Recul dans les armes à vent ou à feu.

416. La force qui chaſſe le projectile, étant le reſſort d'un fluide élaſtique qui ſe dilate dans l'intérieur ou dans l'ame de la pièce, doit s'exercer également dans tous les ſens (295). En même temps qu'elle chaſſe le projectile, elle doit s'exercer contre les parois intérieures de la pièce, & contre la culaſſe. L'action contre les parois intérieures étant égale de toute part, ne peut avoir d'autre effet que de tendre à faire crever la pièce. Quant à l'action contre la culaſſe, ſon effet naturel eſt de

de porter la pièce en ſens contraire du projectile. Pour déterminer la vîteſſe qui peut en réſulter pour la pièce, nous nous propoſerons la queſtion ſuivante.

417. M & m (*fig.* 18) ſont deux maſſes connues, pouſſées en ſens contraires par un reſſort ab qui ſe débande ſuivant la ligne qui joint leurs centres. On demande quelles ſeront les vîteſſes des deux corps, lorſqu'ils ſeront éloignés d'une intervalle donné quelconque.

Suppoſons qu'au bout d'un intervalle de temps quelconque t, les deux corps ſe trouvent en c & d (*fig.* 19), en ſorte que M ait parcouru l'eſpace $ac = z$, & m l'eſpace $bd = y$. La vîteſſe de M au point c (179) ſera $\frac{dz}{dt}$. Donc l'accroiſſement de ſa vîteſſe ſera $d\left(\frac{dz}{dt}\right)$, & par conſéquent $Md\left(\frac{dz}{dt}\right)$ ſera la quantité de mouvement qu'il gagne pendant l'inſtant dt. Soit $F \times dt$ ou Fdt la force que le reſſort communique pendant l'inſtant dt, on aura donc $Fdt = Md\left(\frac{dz}{dt}\right)$.

Et puiſque le reſſort doit évidemment ſe débander également dans les deux ſens oppoſés, on aura, par la même raiſon, $Fdt = md\left(\frac{dy}{dt}\right)$.

De ces deux équations, on conclud tout de ſuite $Md\left(\frac{dz}{dt}\right) = md\left(\frac{dy}{dt}\right)$, & en intégrant, $\frac{Mdz}{dt} = \frac{mdy}{dt}$, équation à laquelle je n'ajoute point de conſtante, parce qu'elle ſatisfait à la condition qu'impoſe la queſtion, ſavoir, que la vîteſſe de m, & celle de M ſoient zéro en même temps. Donc ſi on appelle u la vîteſſe de M, & v celle de m, on a $Mu = mv$.

Pour déterminer ces deux vîteſſes, il faut encore une équation. Reprenons donc les deux équations

$$Fdt = Md\left(\frac{dz}{dt}\right)$$

$$\& \; Fdt = md\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

Multiplions la première par $\frac{dz}{dt}$, & la ſeconde par $\frac{dy}{dt}$, & ajoutant les deux nouvelles équations, nous aurons

$$Fdz + Fdy = M\frac{dz}{dt}d\left(\frac{dz}{dt}\right) + m\frac{dy}{dt}d\left(\frac{dy}{dt}\right).$$

Or ſi on appelle s l'intervalle cd, & a la diſtance initiale ab des deux corps, on a $s = a + z + y$; donc $ds = dz + dy$. On a donc $Fds = M\frac{dz}{dt}d\left(\frac{dz}{dt}\right) + m\frac{dy}{dt}d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, & par conſéquent.....

$\int F ds = \frac{1}{2} M \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{1}{2} m \frac{dy^2}{dt^2}$ ou $2 \int F ds = M u^2 + m v^2$.

418. Pour appliquer cette ſolution à la queſtion du recul, il faut ſuppoſer que m eſt la maſſe du boulet M (*fig.* 17), & que M eſt celle de la pièce AD. F étant la force de la poudre ou du fluide élaſtique qui lors de l'inflammation ſe dégage & pouſſe le boulet, on aura (410) $F = \frac{pqPa}{x} - pP = pP\left(\frac{qa}{x} - 1\right)$ en conſervant les dénominations employées à l'endroit cité. Or la quantité que nous y avons appellée x, eſt celle qu'ici (*fig.* 19) nous venons d'appeler s; & la quantité a qui (410) marquoit l'étendue de la charge, eſt la même que la diſtance initiale ab (*fig.* 19). Cela poſé, on aura donc $F = pP\left(\frac{qa}{s} - 1\right)$, & par conſéquent $Fds = pP\left(\frac{qads}{s} - ds\right)$.

L'équation $2 \int F ds = M u^2 + m v^2$ deviendra donc $2pP(qa \log. s - s) + C = M u^2 + m v^2$. Or lorſque $s = a$, c'eſt-à-dire, au commencement du mouvement, on doit avoir $u = 0$ & $v = 0$; donc $C = -2pP(qa \log. a - a)$; donc $Mu^2 + mv^2 = 2pP(qa \log. \frac{s}{a} + a - s)$.

Donc enfin, ſi on appelle l la longueur de la pièce, & qu'on ſuppoſe que l'action ceſſe au ſortir de la pièce, on aura $Mu^2 + mv^2 = 2pP\,(qa\,\log.\frac{l}{a} + a - l)$, qui, avec l'équation $Mu = mv$, donnera la vîteſſe du boulet & celle de la pièce.

De ces deux équations, on tire

$$u^2 = \frac{2mpP}{M(M+m)}\,(qa\,\log.\frac{l}{a} + a - l)$$

$$\&\ v^2 = \frac{2MpP}{m(M+m)}\,(qa\,\log.\frac{l}{a} + a - l).$$

Si on ſuppoſe M très-grande par rapport à m, ce qui eſt le cas des pièces de gros calibre, on a

$$u^2 = \frac{2mpP}{M^2}\,(qa\,\log.\frac{l}{a} + a - l)$$

$$\&\ v^2 = \frac{2Pp}{m}\,(qa\,\log.\frac{l}{a} + a - l).$$

Cette dernière eſt la même que nous avons trouvée (410), ainſi que cela doit être, puiſque dans le cas où M eſt très-grande par rapport à m, la vîteſſe du recul doit être fort petite.

On voit donc, par ces équations, que, ſi la maſſe de la pièce eſt comparable à celle du projectile, & qu'en même temps la pièce ne ſoit pas arrêtée, la vîteſſe de projection dépend auſſi de la maſſe de la pièce.

419. Pour donner une application de ce qui précède, propoſons-nous de chercher quelle doit être la viteſſe de recul pour une pièce de 24, chargée au tiers du poids du boulet, en ſuppoſant d'ailleurs que la force de la poudre n'eſt pas moindre que 1000 fois le poids de la colonne de l'atmoſphère qui répond à l'ouverture de la pièce.

Le diamètre du boulet de 24 eſt de 5^{po}, 444; ajoutant deux lignes ou 0^{po}, 166 pour le vent du boulet, on a 5^{po}, 61 pour le diamètre de l'ame.

Puiſqu'un pied cube de poudre pèſe 64 liv., la charge qui eſt de 8 liv., doit donc occuper $\frac{1}{8}$ de pied cube, ou $\frac{1728}{8}$ de pouce cube; or la baſe du cylindre que cette charge occupe dans l'ame, ayant 5^{po}, 61 de diamètre, la longueur de ce cylindre ſera de 8^{po}, 73; on a donc $a = 8^{po},73 = 0^{pi},73$. Or la longueur de l'ame d'une pièce de 24 eſt de 9^{pi} 6^{po}; donc $l = 9^{pi},5$. Le poids d'une pièce de 24 eſt de 5400 liv.; ſuppoſons qu'avec l'affût, le poids total ſoit de 6500 liv., on aura $M = 6500$, & l'on a $m = 24$. Il n'y a donc plus que P à calculer.

Or P (333) eſt égal au poids d'un cylindre d'eau qui auroit 32 pieds de hauteur, & $5^{po},61$ pour diamètre de ſa baſe; il eſt donc de 385£ à peu près; donc $P = 385$; enfin nous avons ſuppoſé $q = 1000$.

Nous aurons donc

$$u^2 = \frac{48 \times 30,2 \times 385}{6500 \times 6514}\left(1000 \times 0,73 \log. \frac{9,5}{0,73} + 0,73 - 9,5\right)$$

$$= 0,013\ (730 \times 1,11440 \times 2,3025851 - 8,77)$$

$$= 0,013 \times 1864 = 24,3;$$

donc $u = 5$ à peu près, c'eſt-à-dire, que la viteſſe du recul, lors de la ſortie du boulet, ſeroit d'environ 5 pieds par ſeconde.

Quant à la viteſſe du boulet, on trouvera de même $v^2 = \frac{2 \times 6500 \times 30{,}2 \times 385}{24 \times 6524} \times 1864$, d'où l'on tire $v = 1340$; c'eſt-à-dire, que la viteſſe du boulet a la ſortie de la pièce, ſeroit de 1340 pieds par ſeconde.

On voit donc qu'en ſuppoſant que l'action de la poudre eſt celle d'un fluide élaſtique dont la force diminue en raiſon des eſpaces qu'il occupe, & que la force de ſon reſſort au premier inſtant eſt 1000 fois le poids de la colonne de l'atmoſphère qui répond à l'ouverture de la pièce ; on voit, dis je, que le boulet de 24 recevant une viteſſe de 1340 pieds par ſeconde ; la viteſſe du recul de la pièce ne ſeroit que de 5 pieds par ſeconde.

420. Dans tout ceci nous avons fait abſtraction de la réſiſtance de l'air ; & cette réſiſtance entre pour beaucoup dans l'effet du recul. En effet, lorſque le boulet, dans l'intérieur de la pièce, eſt arrivé à une viteſſe de 1000 pieds par ſeconde, par exemple ; la réſiſtance (382) qu'il éprouve pendant un inſtant dt, eſt $nDsu^2dt$. Suppoſant donc $n = \frac{1}{2}s'$, $s = \frac{1}{2}s'$, s' étant la ſurface d'un grand cercle du boulet, on a $\frac{1}{4}Ds'u^2dt$ pour cette réſiſtance. Or le poids du boulet, en nommant a ſon diamètre, & D' ſa denſité, eſt $\frac{1}{6}s'aD'pdt$; donc la réſiſtance eſt au poids du boulet :: $\frac{1}{4}Ds'u^2dt : \frac{1}{6}s'aD'pdt$: $\frac{\frac{3}{4}D}{8D'} \times \frac{u^2}{pa}$: 1. Or la denſité de l'air eſt à celle du fer :: 1 : 6000 à peu près, c'eſt-à-dire, que $\frac{D}{D'} = \frac{1}{6000}$; d'ailleurs $p = 30^{pi},2$, & $a = 5^{po}444 = 5^{pi},454$, & enfin $u = 1000$; donc la réſiſtance eſt alors au poids du boulet.....

: : $\frac{1}{8} \times \frac{1}{6000} \times \frac{1000^2}{30{,}2 \times 0{,}454}$: 1 :: $\frac{3^{\sim}00}{48 \times 30{,}2 \times 0{,}454}$: 1

:: $\frac{3000}{658}$: 1 :: 4,5 : 1 ; c'eſt-à-dire, que la réſiſtance eſt près de quatre fois & demie auſſi grande que le poids du boulet. On doit donc regarder l'action du fluide élaſtique de la poudre, comme s'exerçant non contre une maſſe conſtante égale au boulet, mais contre une maſſe qui augmente continuellement. La réaction qui en réſulte contre la culaſſe, augmente donc auſſi continuellement. Mais quoiqu'il ſoit facile de donner les équations différencielles qui expriment le mouvement de la pièce & du boulet, eu égard à cette cauſe, néanmoins comme ces équations ne peuvent être intégrées, nous ne nous en occuperons point.

421. Au reſte, comme la vîteſſe que nous trouvons ici au boulet eſt fondée ſur la ſuppoſition que la force de la poudre ſoit 1000 fois auſſi grande que le poids de la colonne d'air qui répond à l'ouverture de la pièce; on peut en conclure d'avance que, ſi le fluide élaſtique qui ſe dégage par l'inflammation, ſe dilate ſelon la loi que nous avons ſuppoſée, la force de la poudre eſt réellement encore plus grande que nous ne le ſuppoſons ici. Car en parlant de la réſiſtance de l'air au mouvement des projectiles, nous verrons qu'il y a des portées qui ſuppoſent une vîteſſe initiale beaucoup plus grande que 1340 pieds par ſeconde.

422. C'eſt à la dernière cauſe dont nous venons de parler, c'eſt-à-dire, au choc de l'air par le fluide élaſtique de la poudre, qu'on doit attribuer le recul lorſqu'on tire à poudre ſeulement; & c'eſt à cette même cauſe qu'on doit attribuer l'élévation des fuſées volantes. Le fluide élaſtique renfermé dans l'intérieur de la fuſée, ſe répand avec une vîteſſe proportionnée à ſa force expanſive & à

la petiteſſe de l'étranglement. Il trouve dans l'inertie de l'air, une réſiſtance qui, telle qu'elle ſoit d'ailleurs, fait l'effet d'une maſſe que ce fluide auroit à chaſſer, & doit par conſéquent occaſionner un recul. Quant à la loi de cette réſiſtance, elle dépend de la vîteſſe avec laquelle un fluide élaſtique renfermé dans un eſpace donné, paſſe dans un autre fluide élaſtique par une ouverture donnée, problème qui, pour le préſent, nous écarteroit trop de notre objet.

De-là on doit conclure auſſi que la vîteſſe de recul qui naît pendant que le boulet parcourt l'ame de la pièce, n'eſt pas toute la vîteſſe de recul qui aura lieu; l'action du fluide élaſtique contre l'air, après la ſortie du boulet, doit encore contribuer à augmenter la vîteſſe du recul; mais il eſt très-difficile de déterminer les limites & l'effet de cette action.

Du mouvement des Corps peſans le long des plans inclinés.

423. Un corps peſant qui eſt abandonné à lui-même ſur une ſurface plane *KLHI* (*fig.* 20) inclinée à l'horizon *PIHN*, n'obéit point librement à ſa peſanteur. Une partie de la force que la peſanteur lui donne, eſt employée à preſſer le plan; & l'autre ſert à le mouvoir le long de ce plan. Il faut donc que la peſanteur ſe décompoſe en deux forces, dont l'une produiſe la preſſion ſur le plan, & dont l'autre donne le mouvement le long du plan.

Soit donc G le centre de gravité de ce corps, ou le point dans lequel la peſanteur peut être cenſée (235) réunir toute ſon action ; ſoit *GB* la quantité dont le corps deſcendroit dans un inſtant, s'il étoit libre. Menons *GC* perpendiculaire au plan *KLHI*; & concevons que par *GB* & *GC*, on faſſe paſſer un plan ; ce plan ſera perpendiculaire aux deux plans *KLHI*, *IPNH*, puiſqu'il paſſe par des droites perpendiculaires à ces plans. Donc ſi on conçoit que *DE*, *EF* ſoient les interſections de ce plan prolongé, avec les deux plans *KLHI*, *IPNH*; *DE*, *EF* ſeront perpendiculaires à l'interſection commune *HI* de ces deux plans.

Menons *GA* parallèle à *DE*, & concevons le parallélogramme *GABC*, dont *GB* ſoit la diagonale, & *GA*, *GC*, les côtés. On peut (190) ſuppoſer que la peſanteur, au lieu de ſolliciter le corps à ſe mouvoir ſuivant *GB*, le ſollicite à ſe mouvoir en même temps ſuivant *GC*, avec la vîteſſe *GC*, & ſuivant *GA* avec la vîteſſe *GA*. Or il eſt évident que *GC* étant perpendiculaire au plan, ne peut manquer d'être détruite, ſi le point *O* où elle rencontre le plan, eſt en même temps un point du corps.

Quant à la force *GA*, comme elle ne tend ni à approcher ni à éloigner le corps, du plan,

puiſqu'elle lui eſt parallèle, elle ne peut manquer d'avoir ſon effet. C'eſt donc GA qui repréſente la vîteſſe que le corps tend à prendre, & prendra dans le premier inſtant.

Comme la force GA eſt dans le plan des deux droites GB & GC, elle eſt donc dans le plan DEF. On peut donc faire abſtraction de l'étendue des deux plans $KLHI$, $IPHN$, & ne conſidérer que le ſeul plan DEF repréſenté en DEF (*fig.* 21), en ſorte qu'on peut regarder le corps comme mu ſur la droite DE que nous appellerons le *Plan incliné*; FE en ſera la *baſe*, & repréſentera le plan horizontal; la perpendiculaire DF menée d'un point quelconque D de DE ſur EF, ſera ce qu'on appelle la *hauteur* du plan incliné.

424. Puiſque la force GA paſſe par le centre de gravité G du corps M, elle doit donc (269) ſe diſtribuer également à toutes les parties de ce corps. Donc, tant qu'on fera abſtraction du frottement, le corps ne peut avoir d'autre mouvement qu'un mouvement pour gliſſer le long du plan, & jamais un mouvement pour rouler, quelle que ſoit d'ailleurs ſa figure, pourvu que la perpendiculaire GC rencontre le plan en un point qui appartienne en même temps à la ſurface du corps. Il n'en ſeroit pas de même, ainſi que nous le

verrons par la ſuite, ſi la perpendiculaire ſur le plan, laiſſoit le point d'appui ou les points d'appui du corps, d'un ſeul côté, ou bien s'il y avoit du frottement. Mais dans tout autre cas le corps ne peut pas rouler.

425. Puiſque le corps *M* doit décrire *GA* dans le même temps qu'il auroit décrit *GB* par l'action libre de ſa peſanteur, ſi l'on conçoit qu'à la fin du premier inſtant, la peſanteur agiſſe de nouveau : comme elle communique dans des inſtans égaux des degrés égaux de vîteſſe, ſi l'on imagine pour le ſecond degré de vîteſſe qu'elle communiquera ſuivant la verticale, une décompoſition ſemblable à celle que nous avons faite pour le premier inſtant ; on verra que le ſecond parallélogramme ſera parfaitement égal au premier, & dans le même plan. On conclura donc, de même, que la force perpendiculaire au plan ſera détruite ; & la force parallèle, qui ſera égale à *GA*, ſe joindra à celle-ci ; en ſorte qu'en raiſonnant de même, pour les inſtans ſuivans, on conclura généralement que la vîteſſe le long du plan incliné, s'accélère par des degrés égaux ; c'eſt-à-dire, que *le mouvement des corps peſans, le long des plans inclinés, eſt un mouvement uniformément accéléré.* Donc tout ce que nous avons dit (161 *& ſuiv.*) ſur les mouvemens uniformément accélérés, s'applique mot à mot au mouvement le long des plans inclinés ;

en ſorte que les vîteſſes ſont comme les temps ; les eſpaces parcourus ſont comme les quarrés des temps, ou comme les quarrés des vîteſſes, &c.

426. Donc pour être en état de déterminer le mouvement ſur un plan d'une inclinaiſon connue, il ne s'agit que de connoître le rapport de la force qui accélère, à la peſanteur ; c'eſt à-dire, le rapport de *GA* à *GB*. Or *GA* & *GB* étant parallèles à *DE*, *DF*, l'angle *AGB* eſt égal à *EDF* ; & l'angle *A* étant droit ainſi que l'angle *F*, les deux triangles *AGB*, *EDF* ſont ſemblables, & donnent *DE* : *DF* : : *GB* : *GA* ; c'eſt-à-dire, que *la longueur du plan incliné, eſt à ſa hauteur, comme la vîteſſe que la peſanteur donneroit au corps, s'il étoit libre, eſt à celle qu'elle lui donne réellement le long du plan incliné.*

Or, comme la peſanteur donne à un corps libre, dans une ſeconde de temps, une vîteſſe à parcourir 30,2 pieds uniformément, par ſeconde (172) ; il ſera donc toujours facile de déterminer qu'elle vîteſſe acquiert, dans la première ſeconde de ſa chute, un corps qui tombe le long d'un plan incliné.

Par exemple, ſi la longueur du plan, eſt double de la hauteur, la vîteſſe acquiſe le long de ce plan pendant la première ſeconde, ſera de la moitié de 30,2 pieds ; c'eſt-à-dire, qu'au bout d'une ſeconde ſi la peſanteur

ceſſoit d'agir, le corps parcouroit 15,1 pieds à chaque ſeconde.

427. Ayant ainſi déterminé la vîteſſe pour la première ſeconde, on aura la vîteſſe après tel nombre de ſecondes qu'on voudra, en multipliant celle-là par le nombre de ſecondes; & l'eſpace, en multipliant cette même première vîteſſe, par la moitié du quarré de ce nombre de ſecondes (174). En un mot, il ſera facile de déterminer toutes les autres circonſtances de ces mouvemens, par ce qui a été dit (172 & *ſuiv.*). De ces principes, on déduit avec facilité les propriétés ſuivantes.

428. Si deux corps peſans, partis en même temps du point D (*fig.* 22) deſcendent, l'un le long du plan DE, l'autre le long de la verticale DF, & que l'on veuille ſavoir à quel endroit du plan DE, le premier eſt arrivé, lorſque le ſecond eſt en un point quelconque A; il n'y a autre choſe à faire qu'à mener AB perpendiculaire ſur DE; le point B ſera le point cherché.

En effet, ſi on repréſente par p, la vîteſſe que la peſanteur donne à un corps libre en une ſeconde de temps, on aura (174) en nommant t le temps néceſſaire pour tomber le long de DA, $DA = \frac{pt^2}{2}$. D'un autre côté (426) la vîteſſe

qu'acquiert en une ſeconde, le corps qui tombe le long de DE, eſt $\frac{p \times DF}{DE}$; donc en nommant T le temps néceſſaire pour tomber de D en B, on aura (174) $DB = \frac{p \times DF}{DE} \times \frac{T^2}{2}$; donc $DA : DB :: \frac{pt^2}{2} : \frac{p \times DF}{DE} \times \frac{T^2}{2}$ $:: DE \times t^2 : DF \times T^2$; mais $DA : DB :: DE : DF$; donc $DE : DF :: DE \times t^2 : DF \times T^2$; donc $T^2 = t^2$, ou $T = t$.

429. Donc ſi DG (*fig.* 23) eſt un troiſième plan parcouru par un troiſième mobile parti du point D en même temps que les deux autres; en menant du point A la perpendiculaire AC, les points A, B, C, ſont ceux où ces trois mobiles arrivent en même temps.

430. Si ſur DA comme diamètre, on décrit une demi-circonférence; elle paſſera (*Géom.* 72) par les points C & B, puiſque les angles C & B ſont droits. Donc les cordes DC & DB ſont décrites dans le même temps que le diamètre vertical AD; & comme ceci ne dépend point de la longueur ni de l'inclinaiſon des cordes, on peut dire généralement *que le temps de la chute par la corde quelconque d'un cercle, tirée de l'extrémité du diamètre vertical, eſt le même que le temps de la chute par ce diamètre vertical.*

431. Nous venons de voir (426) que p étant la vîteſſe que la peſanteur donne, dans une ſeconde de temps, à un corps libre, $\frac{p \times DF}{DE}$ eſt celle qu'elle donne, dans le même temps, au corps qui ſe meut le long de DE. Soient t & T les temps néceſſaires pour décrire DF & DE; on aura $DF = \frac{pt^2}{2}$, & $DE = \frac{p \times DF}{DE} \times \frac{T^2}{2}$; donc $DF : DE :: \frac{pt^2}{2} : \frac{p \times DF}{DE} \times \frac{T^2}{2}$; donc $\frac{(DF)^2}{DE} \times T^2 = DE \times t^2$, ou $(DF)^2 \times T^2 = (DE)^2 \times t^2$, ou $DF \times T = DE \times t$; donc $t : T :: DF : DE$. C'eſt-à-dire, que *les temps néceſſaires pour arriver à différens points* F *&* E *de l'horizontale* FE, *en parcourant des plans de même hauteur, ſont entr'eux comme les longueurs de ces plans.*

432. La vîteſſe du corps qui tombe le long de DF, eſt pt, au bout du temps t. Par une ſemblable raiſon, celle du corps qui tombe le long de DE eſt $\frac{p \times DF}{DE} \times T$, au bout du temps T; donc ſi on nomme u & v, les vîteſſes acquiſes en arrivant en F & E, on aura $u : v :: pt : \frac{p \times DF}{DE} T$, donc $pvt = pu \times \frac{DF}{DE} T$. Mais nous venons de voir (431) que $t : T :: DF$

: DE, ce qui donne $t = \frac{DF \times T}{DE}$, ſubſtituant cette valeur de t, & réduiſant, on a $v = u$. Donc *ſi pluſieurs corps décrivent des plans différemment inclinés, mais de même hauteur, ils auront la même vîteſſe, après avoir parcouru des parties de même hauteur, chacun ſur ſon plan.*

Du mouvement le long des Surfaces courbes.

433. Si un corps ſans peſanteur & ſans reſſort, parcourt, en vertu d'une impulſion primitive, les côtés ſucceſſifs AB, BC, &c. (*fig.* 24) d'un polygone quelconque ; à la rencontre de chaque côté, il perdra une partie de ſa vîteſſe que l'on déterminera de la manière ſuivante.

Concevons qu'il ſe meuve actuellement de A vers B, & que lorſqu'il eſt en B, ſa vîteſſe ſoit telle que dans un temps déterminé, comme d'une ſeconde, il décriroit la ligne BF ſur AB prolongée, s'il étoit libre. Ayant élévé au point B ſur BC la perpendiculaire BE, on imaginera le parallélogramme rectangle $BDFE$ dont BF ſoit la diagonale, & dont les côtés ſoient ſur BC & BE ; & au lieu de concevoir que le corps a la vîteſſe BF, on imaginera qu'il a, tout enſemble,

le

les deux vîteſſes BD & BE; or comme le côté BC l'empêche d'obéir à la vîteſſe BE, il eſt clair que ſa vîteſſe ſera réduite à BD.

Si du point B comme centre, & du rayon BF, on imagine que l'on ait décrit l'arc FI; DI qui eſt la différence entre BF & BD, ſera donc la vîteſſe perdue; or DI eſt le ſinus verſe de l'arc FI ou de l'angle FBC que font les deux côtés contigus AB, BC. Donc tant que ces deux côtés feront un angle fini, le corps perdra une partie finie de ſa vîteſſe, à la rencontre de chaque côté.

434. Mais ſi l'angle que forment ces deux côtés, eſt infiniment petit, la vîteſſe perdue, non-ſeulement ne ſera pas une quantité finie; elle ne ſera pas même infiniment petite du premier ordre; elle ne ſera qu'infiniment petite du ſecond. Pour le démontrer, la queſtion ſe réduit à faire voir que le ſinus verſe d'un angle infiniment petit, eſt infiniment petit du ſecond ordre; & voici comment cela ſe démontre.

CD (*fig.* 25) étant un arc quelconque, & BD une perpendiculaire ſur le diamètre AC, on a (*Géom.* 121) $AB : BD :: BD : BC$; donc ſi CD, & par conſéquent BD eſt infiniment petite, BC (ſinus verſe de CD) ſera

infiniment plus petite que BD, puiſqu'elle eſt contenue dans BD autant que BD l'eſt dans la quantité infiniment plus grande AB. Donc BC eſt infiniment petite du ſecond ordre.

435. Concluons de-là que *ſi un corps ſans peſanteur ſe meut le long de la ſurface courbe* ABC (*fig.* 26) *il a par-tout la même vîteſſe.*

Car en conſidérant cette courbe comme un polygone d'une infinité de côtés ; comme ces côtés ſont des angles infiniment petits entr'eux, la perte de vîteſſe à la rencontre de chaque côté, eſt infiniment petite du ſecond ordre à l'égard de la vîteſſe primitive. Donc la ſomme des vîteſſes perdues en parcourant une infinité de ces côtés, c'eſt-à-dire en parcourant un arc quelconque ABC, ne peut former qu'une quantité infiniment petite du premier ordre. Donc la vîteſſe n'eſt point altérée.

436. Venons, maintenant, au mouvement des corps peſans ſur les ſurfaces courbes. Nous conſidérerons ſeulement celui qui ſe fait dans un plan vertical.

Soit donc AMB (*fig.* 27) la ſection de la ſurface courbe, par un plan vertical, & la trace que le corps fait ſur cette ſurface. Conſidérons cette courbe comme un polygone d'une infinité de

côtés; & concevons que le corps vient de décrire le petit côté nM. Comme la rencontre du côté Mm ne peut (434) lui faire rien perdre de ſa vîteſſe, il décriroit Mm avec la vîteſſe qu'il avoit en M, ſi la peſanteur n'agiſſoit plus. Mais cette force agiſſant ſuivant la verticale Mq, ſollicite de nouveau le corps à deſcendre, comme elle le feroit ſur un plan de pareille inclinaiſon. Donc ſi l'on imagine que la vîteſſe Mq que la peſanteur tend à donner dans un inſtant, ſoit décompoſée en deux, l'une Ms perpendiculaire à Mm, & l'autre Mo dirigée ſuivant Mm; ce ſera en vertu de cette dernière que la vîteſſe de M ſera accélérée. Or en menant la verticale mr, & comparant les triangles ſemblables Mqo, Mmr, on a $Mm : mr :: Mq : Mo$; donc $Mo = \frac{Mq \times mr}{Mm}$.

Concevons que les différens points de la courbe quelconque AB ſoient rapportés à l'axe vertical quelconque BZ. Nommons BP, x; PM, y; l'arc BM, s. Nous aurons Pp ou $mr = -dx$; $Mm = -ds$. Je donne (21) le ſigne $-$, à ces quantités, parce que x & s vont en diminuant, pendant que le temps t augmente.

Soit p la vîteſſe que la peſanteur donne à un corps libre, dans une ſeconde; pdt ſera (173)

celle qu'elle lui donneroit dans l'inſtant dt. Nous aurons donc la vîteſſe $Mq = pdt$. Nommons u la vîteſſe qu'a le corps, lorſqu'il arrive en M; du marquera l'augmentation qu'il recevra pendant le temps dt; ainſi on aura $du = Mo$. Subſtituant ces valeurs dans l'équation $Mo = \frac{Mq \times mr}{Mm}$, on a $du = pdt \times \frac{-dx}{-ds}$, $= pdt \times \frac{dx}{ds}$. Or (179) $dt = \frac{-ds}{u}$; donc réduction faite, $udu = -pdx$; équation dont l'intégrale eſt $\frac{uu}{2} = C - px$, ou $uu = 2C - 2px$.

Pour déterminer la conſtante C, ſuppoſons que le point A d'où le corps a commencé à tomber, ſoit élevé au-deſſus de l'horizontale qui paſſeroit par B, d'une quantité $BZ = b$. Il faut donc que lorſque u étoit zéro, x fût $= b$; donc $0 = 2C - 2pb$; donc $C = pb$; donc $uu = 2pb - 2px = 2p(b - x) = 2p \times PZ$. Mais (176) ſi un corps peſant tomboit librement de la hauteur ZP, le quarré de la vîteſſe qu'il auroit en P, ſeroit $2p \times PZ$; donc *lorſqu'un corps deſcend le long d'une ligne courbe quelconque, il a en quelque point que ce ſoit, la même vîteſſe que s'il étoit tombé librement de pareille hauteur.*

Ainſi la vîteſſe qu'acquiert ſucceſſivement un

corps qui, par ſa peſanteur, tombe dans la concavité d'une ligne courbe, eſt tout-à-fait indépendante de la nature de cette ligne courbe.

437. Donc ſi le corps après être arrivé au point B le plus bas, & dont je ſuppoſe que la tangente ſoit horizontale, rencontre la concavité de la même ou d'une autre courbe quelconque qui touche la première en B, il s'élevera dans celle-ci, à une hauteur égale à celle dont il étoit parti.

En effet, ſuppoſons que le corps M ſoit actuellement en B où $x = 0$; ſa vîteſſe ſera telle qu'on aura $uu = 2pb$, ou $VV = 2pb$, en appellant V cette vîteſſe pour la diſtinguer de l'autre. Concevons qu'avec cette vîteſſe il remonte le long de la courbe quelconque BM', on trouvera par le même raiſonnement que ci-deſſus, que ſa vîteſſe en un point quelconque M' ſe déterminera par l'équation $-du^{\prime} = pdt \times \frac{dx}{ds'}$, en appellant u' ſa vîteſſe, s' l'arc BM', & obſervant que u' diminue à meſure que t, s' & x augmentent. Mettant donc pour dt ſa valeur $\frac{ds'}{u'}$, on aura $u'du' = -pdx$; & en intégrant $u'^2 = 2C - 2px$; mais lorſque $x = 0$, la vîteſſe u' eſt V, on a donc $V^2 = 2C$; & puiſque $V^2 = 2pb$, on a $2C = 2pb$;

donc $u'^2 = 2pb - 2px$. Or lorſque le corps ceſſera de monter, on aura $u' = 0$, & par conſéquent $2pb - 2px = 0$, qui donne $x = b$; donc le point où le corps ſera arrivé dans la courbe quelconque BA' ſera à même hauteur que le point A.

438. A l'égard du temps que le corps emploiera à décrire un arc quelconque AM ou AB de la courbe; comme on a $dt = \frac{-ds}{u}$, on aura $dt = \frac{-ds}{\sqrt{(2pb - 2px)}}$; enſorte que, il faudra, par le moyen de l'équation de la courbe, avoir la valeur de ds, en x & dx; & l'ayant ſubſtituée dans cette valeur de dt, on aura celle de t, en intégrant.

439. Puiſqu'un corps qui tombe par un arc de courbe quelconque, a dans quelque point que ce ſoit, la même vîteſſe que s'il étoit tombé verticalement de la hauteur du point d'où il eſt parti, au-deſſus de celui où il eſt actuellement (436); il s'enſuit que ſi un corps tombe par l'arc AD (*fig.* 28), il aura au point D la même vîteſſe que s'il étoit tombé le long de FD, AF étant horizontale, & CD verticale. Par la même raiſon, s'il tombe par l'arc BD, il aura au point D la même vîteſſe que s'il étoit tombé le long de ED. Or ſi on laiſſoit tomber un corps ſucceſſivement du point F & du point E, il auroit en arrivant en D, des vîteſſes qui (172) ſeroient comme les racines quar-

rées des hauteurs. Donc ſi on nomme u & u' ces viteſſes, on aura $u : u' :: \sqrt{(FD)} : \sqrt{(ED)}$.

Mais (*Géom.* 173) ſi ABD eſt un arc de cercle, & que AD & BD ſoient les cordes des arcs ABD & BD, on a $(AD)^2 : (BD)^2 :: FD : ED$, & par conſéquent $AD : BD :: \sqrt{(FD)} : \sqrt{(ED)}$; donc $u : u' :: AD : BD$; c'eſt-à-dire, que les viteſſes acquiſes en tombant le long des arcs de cercle ABD & BD ſont entr'elles comme les cordes AD & BD de ces arcs.

440. Donc ſi ces arcs ſont fort petits, les viteſſes ſeront à très-peu près comme ces arcs, c'eſt-à-dire, dans la raiſon des eſpaces à parcourir juſqu'au point le plus bas.

441. Ainſi, ſi l'on veut faire naître dans un mobile une viteſſe double, triple, &c. de celle qu'auroit au point D, un mobile tombé par l'arc BD, il n'y a qu'à faire tomber ce premier, par l'arc ABD dont la corde ſoit double, triple, &c. de la corde BD.

442. Et ſi l'on veut faire naître dans un mobile une viteſſe connue; par exemple, une viteſſe de 4 pieds par ſeconde, il n'y a qu'à déterminer, par ce qui a été dit (176) de quelle hauteur un corps devroit tomber pour acquérir une viteſſe de 4 pieds par ſeconde; & ayant pris ſur la verticale DC, une ligne DF égale à cette hauteur; à un point C pris au-delà ſur DC, on attachera un fil de la longueur DC; & y ayant ſuſpendu le mobile, on l'écartera au point A où la perpendiculaire FA coupe l'arc DA. Alors ce mobile parti du point A, aura en D la viteſſe de 4 pieds par ſeconde, c'eſt-à-dire la viteſſe demandée.

Ces propriétés & celle que nous allons démontrer de l'égalité de durée des chutes par les petits arcs de cercle, ſont le fondement de la machine avec laquelle on fait en Phyſique les expériences ſur le choc des corps. *Voyez les Leçons de Phyſique de M. l'abbé Nollet, la Phyſique de s'Graveſande, & autres.*

Du mouvemant d'Oſcillation.

443. Nous venons de voir (437) qu'un corps peſant après être deſcendu par l'arc quelconque de courbe AB (*fig.* 27), doit (abſtraction faite de la réſiſtance de l'air & du frottement) remonter à pareille hauteur dans la courbe quelconque BA' qui auroit au point B la même tangente horizontale que BA. Donc ce corps retombant enſuite, parcourroit en ſens contraire toute l'étendue $A'BA$; & feroit conſécutivement des allées & des retours qui ne finiroient jamais. Ce mouvement eſt, ce qu'on appelle, un *mouvement d'oſcillation*. Nous venons de voir (438) ce qu'il y avoit à faire en général, pour déterminer la durée de chaque oſcillation qui doit, évidemment, être le double du temps de la chute par l'arc AB, ſi BA' eſt le même que BA.

Lorſque la courbe le long de laquelle le corps deſcend, eſt un cercle, & qu'en même-temps les oſcillations ſe font par de petits arcs, elles ont cette

propriété remarquable & importante, que leur durée ne dépend pas de l'étendue de l'arc AB (*fig.* 29); enſorte que l'arc AB étant petit, (comme de 4 ou 5 degrés au plus), le mobile arrivera toujours en B dans le même temps, ſoit qu'il parte du point A, ſoit qu'il parte de tout autre point O pris entre A & B. Voici comment on peut s'aſſurer de cette propriété.

En conſervant les mêmes dénominations que ci-deſſus; & nommant a le rayon BC du cercle BAD; nous aurons, par la nature du cercle, $y = \sqrt{(2ax - xx)}$. D'où l'on conclura aiſément que l'arc Mm, ou ds, ou $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, eſt $= \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$. Mais comme l'arc BM eſt petit, enſorte que x eſt petite à l'égard de a; on doit, pour exprimer cette condition, ſupprimer xx, vis-à-vis de $2ax$; ce qui donne $ds = \frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax)}}$. Subſtituant cette valeur de ds, dans celle de dt (438); on a $dt = \frac{-a\,dx}{\sqrt{(2ax)} \times \sqrt{(2pb - 2px)}}$, qu'on peut réduire à $dt = \frac{-\frac{1}{2}\,a\,dx}{\sqrt{(ap)} \times \sqrt{(bx - xx)}}$, ou $dt = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{-\frac{1}{2}\,dx}{\sqrt{(bx - xx)}}$.

Or de même (93) que $\frac{a\,dx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$ exprime l'élément d'un arc de cercle dont le diamètre eſt $2a$,

de même $\frac{\frac{1}{2} b\,dx}{\sqrt{(bx - xx)}}$ exprime l'élément d'un arc de cercle dont le diamètre ſeroit b, & l'abſciſſe x. Mais la ligne BZ étant b, ſi ſur BZ comme diamètre, on décrit le demi-cercle $BM'Z$, alors $M'm'$ ſera cet élément; enſorte qu'on aura.... $\frac{\frac{1}{2} b\,dx}{\sqrt{(bx - xx)}} = M'm' = d(BM')$; donc $\frac{\frac{1}{2} dx}{\sqrt{(bx - xx)}} = \frac{d(BM')}{b}$. Subſtituant cette valeur dans celle de dt, on a $dt = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{-d(BM')}{b}$; & en intégrant, $t = C - \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{BM'}{b}$. Il ne s'agit donc plus que de déterminer la conſtante C. Or il eſt facile de voir que lorſque $t = 0$, c'eſt-à-dire, quand le corps part du point A, l'arc BM' devient la demi-circonférence $BM'Z$; donc $0 = C - \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{BM'Z}{b}$, & $C = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{BM'Z}{b}$; donc $t = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{BM'Z}{b} - \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{BM'}{b}$, ou $t = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{ZM'}{b}$. C'eſt-là l'expreſſion du temps employé à parcourir l'arc quelconque AM; temps qui eſt ſuppoſé compté en ſecondes.

Mais lorſque l'arc AM devient AB, c'eſt-à-dire, au bout de la demi-oſcillation, l'arc ZM'

devient $ZM'B$; on a donc en nommant $\frac{1}{2}T$, la durée de la demi-oscillation.....

$\frac{1}{2}T = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{ZM'B}{b}$, ou $T = \sqrt{\frac{a}{p}} \times \frac{2ZM'B}{b}$.

Or si l'on représente par $1 : c$, le rapport du diamètre à la circonférence d'un cercle, on a $1 : c :: b : 2ZM'B$, & par conséquent.....

$\frac{2ZM'B}{b} = c$; donc $T = \sqrt{\frac{a}{p}} \times c$, ou $T = c\sqrt{\frac{a}{p}}$. C'est-là l'expression de la durée d'une oscillation entière. Et comme cette quantité ne renferme point b, qui détermine la hauteur d'où le corps est descendu, & par conséquent l'étendue de l'excursion AB, il s'ensuit que le temps T ne dépend nullement de l'étendue de l'arc, tant que cet arc est petit. Donc *les oscillations qui se font dans de petits arcs de cercle, sont sensiblement isochrones; c'est-à-dire de même durée.*

444. Ce que nous venons de dire s'applique tout naturellement aux pendules. On appelle en général *pendule*, tout fil ou toute verge qui tient un ou plusieurs corps suspendus ou attachés à un point fixe C (*fig.* 30). On l'appelle *pendule simple*, lorsqu'il n'y a qu'une masse soutenue par un fil ou par une verge sans pesanteur, & qu'en même temps cette masse est d'un diamètre très-petit à l'égard de la longueur du pendule. Nous

ne parlons, pour le préſent, que du pendule ſimple.

Lorſqu'on écarte le pendule, de la ſituation verticale CB, l'effort de la peſanteur ſur la maſſe tranſportée en A, agiſſant ſuivant la verticale AM, n'eſt pas tout employé à mouvoir le corps; une partie s'exerce ſur le point C. Il faut donc concevoir l'effet AM décompoſé en deux autres, l'un AN dirigé ſuivant CAN, & qui eſt détruit; l'autre AP qui donne au corps le mouvement ſuivant l'arc AB. Or comme le rayon CA eſt perpendiculaire à l'arc, on voit donc que le mouvement ſe décompoſe ici de la même manière que ſi le corps tomboit naturellement le long de l'arc AB, qui a pour rayon la longueur CA du pendule. Donc en effet tout ce que nous venons de dire, s'applique immédiatement aux pendules; voici, maintenant, quelques conſéquences qui réſultent du calcul précédent appliqué aux pendules.

445. Nous avons trouvé par la durée d'une oſcillation $T = c\sqrt{\frac{a}{p}}$. Donc pour un autre pendule dont la longueur ſeroit a', & qui ſeroit animé par une peſanteur différente ou capable de donner la vîteſſe p' dans une ſeconde, on auroit, en nommant T' la durée d'une oſcillation, $T' = c\sqrt{\frac{a'}{p'}}$. Donc $T : T' :: c\sqrt{\frac{a}{p}} : c\sqrt{\frac{a'}{p'}}$

$:: \sqrt{\frac{a}{p}} : \sqrt{\frac{a'}{p'}}$; c'eſt-à-dire, que *ſi deux pendules de longueur différente, ſont animés par des peſanteurs différentes; les durées des oſcillations ſont comme les racines quarrées des longueurs des pendules, diviſées par les racines quarrées des quantités qui expriment ces peſanteurs.*

446. Comme la peſanteur eſt la même dans un même lieu, on doit donc dire que les durées des oſcillations ſont comme les racines quarrées des longueurs des pendules.

447. Mais ſi un même pendule étoit ſucceſſivement expoſé à l'action de deux peſanteurs différentes, alors a étant égal à a', on auroit $T : T' :: \sqrt{\frac{a}{p}} : \sqrt{\frac{a}{p'}} :: \sqrt{ap'} : \sqrt{ap} :: \sqrt{p'} : \sqrt{p}$; c'eſt-à-dire, que les durées des oſcillations ſeroient en raiſon inverſe des racines quarrées des peſanteurs.

448. Soit n le nombre de vibrations que fait le pendule a dans un temps donné, comme d'une heure, ou $3600''$; on aura $T = \frac{3600''}{n}$. Par la même raiſon, ſi l'on repréſente par n' le nombre de vibrations que fait, pendant le même temps, le pendule a', on aura $T' = \frac{3600''}{n'}$; donc

$T : T' :: \frac{3600''}{n} : \frac{3600''}{n'} :: n' : n$; c'eſt-à-dire, que les nombtes de vibrations que font, en même-temps, deux pendules de longueur différente, ſont en raiſon inverſe des durées de chaque vibration.

Donc puiſqu'on a $T : T' :: \sqrt{\frac{a}{p}} : \sqrt{\frac{a'}{p'}}$, on aura $n : n' :: \sqrt{\frac{a'}{p'}} : \sqrt{\frac{a}{p}}$; c'eſt à-dire, que *les nombres de vibrations que font, en même-temps, deux pendules de longueur différente, & qui ſont ſollicités par des peſanteurs différentes, ſont en raiſon inverſe des racines quarrées des longueurs des pendules diviſées par les racines quarrées des peſanteurs.* Enſorte que ſi les peſanteurs ſont les mêmes, les nombres de vibrations ſeront réciproquement comme les racines quarrées des longueurs des pendules; & ſi les longueurs ſont les mêmes, les nombres des vibrations ſeront directement comme les racines quarrées des peſanteurs.

449. Donc ſi un même pendule porté en différens lieux de la Terre n'y fait pas le même nombre de vibrations dans un même intervalle de temps, on doit en conclure que la peſanteur n'eſt pas la même en ces différens lieux, & le nombre des vibrations faites dans un même temps, en chaque lieu, fera connoître la diminution ou l'augmentation de la peſanteur. C'eſt par ce principe qu'on s'eſt aſſuré que la peſanteur va en diminuant à meſure qu'on s'approche de l'Equateur; & au

contraire va en augmentant, à meſure qu'on s'approche des Pôles; nous en verrons la raiſon dans peu.

450. Ce principe, que les nombres de vibrations faites dans un même temps par deux pendules différens, animés d'une même peſanteur, ſont réciproquement proportionnels aux racines quarrées des longueurs des pendules, peut ſervir à trouver la longueur du pendule à ſecondes dans un lieu quelconque.

Ayant ſuſpendu à un fil de métal très-délié, un corps qui ſous un petit volume renferme beaucoup de matière, comme une balle de plomb, de cuivre, d'or, &c. on donnera à ce fil, à compter depuis le point de ſuſpenſion juſqu'au centre de la balle, une longueur de trois pieds au moins, & que l'on meſurera très-exactement. On fera oſciller ce pendule en l'écartant peu de la verticale, & l'on comptera le nombre d'oſcillations qu'il fera dans un temps déterminé & bien conſtaté (je ſuppoſe ici que ce ſoit une heure); après quoi on fera cette proportion; comme 3600 nombre des oſcillations que doit faire le pendule cherché, eſt au nombre d'oſcillations obſervées, ainſi la racine quarrée de la longueur du pendule d'obſervation, eſt à un quatrième terme qui ſera la racine quarrée de la longueur du pendule à ſecondes; &, en quarrant, on aura cette longueur. C'eſt ainſi qu'on a déterminé que le pendule ſimple qui fait ſes ocillations dans une ſeconde, doit, à la latitude de Paris, avoir 3 pl. c po. 81, 57. Cette meſure a été déterminée par pluſieurs expériences faites avec un très-grand ſoin.

451. Il eſt facile, maintenant, de déterminer de combien doit tomber dans la première ſeconde

de ſa chute, un corps à qui l'air ne fait pas de réſiſtance ſenſible dans cet intervalle de temps.

En effet, l'équation $T = c\sqrt{\frac{a}{p}}$, donne $p = \frac{acc}{TT}$; valeur dans laquelle p repréſente la viteſſe qu'un corps peſant acquiert dans la première ſeconde de ſa chute, & qui (165) eſt le double de la hauteur dont il tomberoit dans ce temps; a eſt la longueur du pendule qui fait ſes oſcillations dans le temps T; en ſorte que ſi pour T, nous mettons une ſeconde, a doit être de $3^{pl}\ 0^{pc}\ 8^{l}$, 57 ou 440^{l}, 57. Enfin, c eſt le rapport de la circonférence au diamètre, & vaut par conſéquent $\frac{355}{113}$; donc $p = (\frac{355}{113})^2 \times 440{,}57$, quantité qui vaut $4348^{l}{,}25146$, & qui réduite en pieds, eſt de $30{,}^{pl}19619$; donc l'eſpace décrit par un corps peſant dans la première ſeconde de ſa chute, eſt de $15^{pl}{,}09809$; c'eſt ce que nous avions promis (172) de faire voir

452. Si l'on appelle t le temps qu'il faudroit à un corps peſant deſcendant librement, pour parcourir le diamètre BD ou $2a$ (*fig.* 29), on aura (175), $2a = \frac{pt^2}{2}$; donc $\sqrt{\frac{a}{p}} = \frac{1}{2}t$. Subſtituant cette valeur dans l'équation $T = c\sqrt{\frac{a}{p}}$, on a $T = \frac{1}{2}ct$, ou $\frac{1}{2}T = \frac{1}{4}ct$ qui donne $\frac{1}{2}T : t :: \frac{1}{4}c : 1$; c'eſt-à-dire, que la durée de la chute par le petit arc quelconque AB, eſt au temps de la chute par le diamètre, comme le quart de la circonférence eſt au diamètre.

Or

Or le quart de la circonférence eſt plus petit que le diamètre ; donc un corps emploie moins de temps à tomber par un petit arc de cercle dont la tangente inférieure eſt horizontale, qu'il n'en emploieroit à tomber le long du diamètre. Et puiſque (430) le temps de la chute par le diamètre, eſt le même que celui de la chute par la corde quelconque AB ; on voit donc qu'un corps arrivera plutôt de A en B, en tombant par l'arc AB, qu'en tombant par la ligne droite AB. Ainſi la ligne droite eſt bien le plus court chemin, mais elle n'eſt pas toujours le chemin qui exige le temps le plus court.

Du Mouvement en ligne courbe, en général.

453. Puiſqu'un corps qui a été mis une fois en mouvement, doit (abſtraction faite de tout obſtacle) perſévérer dans cet état de mouvement, avec la même vîteſſe & la même direction (150) ; il s'enſuit qu'un corps ne peut décrire une ligne courbe, à moins qu'il ne ſurvienne une force ou un obſtacle qui change à chaque inſtant la direction de ſon mouvement.

Si la force qui agit ſur le mobile ſuivant une directiondifférente de celle qu'il ſuit, agit à des

intervalles de temps, finis, & communique, à chaque intervalle de temps, une vîteſſe finie; le corps décrira un polygone. Par exemple, ſi lorſque le corps qui décrit la ligne AB (*fig.* 31) eſt arrivé en B, il reçoit une impulſion capable de lui faire décrire BE, dans le même temps; au lieu de décrire $BD = AB$, comme il l'auroit fait ſans cette nouvelle force, il décrira (191) la diagonale BC du parallélogramme $BECD$. Et ſi lorqu'il eſt arrivé en C, & qu'il tend à décrire CG égale & en ligne droite avec BC, une nouvelle force vient à agir ſur lui, ſuivant CH, & tend à lui faire décrire CH dans le même temps, il décrira réellement la diagonale CF du parallélogramme $CHFG$, & ainſi de ſuite; en ſorte que par la ſuite des dérangemens qu'il aura reçus, il aura décrit les côtés AB, BC, CF, &c. du polygone.

454. Mais ſi le mobile ayant reçu d'abord une vîteſſe finie, la force qui le détourne, agit ſans interruption; ou, ce qui revient au même, ſi elle agit à des intervalles de temps infiniment petits, & ſi en même temps, à chaque intervalle, elle imprime des degrés de vîteſſe infiniment petits; alors les côtés BC, CF, décrits pendant la durée de chaque inſtant, ſeront infiniment

petits ; & les lignes BE, CH qui marquent les actions infiniment petites de la force qui fait varier le mouvement, devant être infiniment petites en comparaiſon de celles BC, CF qui marquent la vîteſſe actuelle du mobile, les angles BCE, CFH, ou leurs égaux DBC, GCF, ſeront infiniment petits ; la trace du mobile ſera donc une ligne courbe. D'où l'on voit qu'il ne ſuffit pas, pour qu'un corps décrive une ligne courbe, que la force agiſſe à chaque inſtant infiniment petit : il faut encore que l'action qu'elle exerce ſuivant ſa propre direction, à chaque inſtant, ſoit infiniment petite. Telle eſt l'action que la peſanteur exerce à chaque inſtant : telle eſt la réſiſtance des fluides à chaque inſtant du mouvement.

455. Soit que la force qui agit ſur le mobile, ſoit une force active, comme la peſanteur ; ſoit qu'elle ſoit une force paſſive comme la réſiſtance d'un point fixe, ou d'un fluide en repos ; ou de tout autre obſtacle ; on eſt toujours maître de conſidérer le mouvement, comme une ſuite de mouvemens compoſés, comme dans l'exemple que nous venons de rapporter ; ou bien de le conſidérer comme une ſuite de mouvemens décompoſés, de la manière ſuivante.

Par exemple, lorſque le mobile arrivé en B

(*fig.* 32) eſt prêt de recevoir l'action de la force *BE*; je puis (287) concevoir que le mouvement *BD* qu'il auroit eu, ſans cette nouvelle force, eſt décompoſé en un mouvement *BC* qu'il doit prendre réellement, & un autre mouvement *BI* qui ne doit rien produire, & qui par conſéquent doit être égal & directement oppoſé à l'effort *BE*. Pareillement, lorſque le corps ſera arrivé en *C*; je concevrai le mouvement *CG* qu'il auroit eu ſans la force *CH*, comme décompoſé en un mouvement *CF* qu'il aura réellement, & un mouvement *CK* égal & directement oppoſé à l'effort *CH*.

Dans quelque cas que ce ſoit, on peut toujours enviſager le mouvement, de telle de ces deux manières, que l'on voudra. Mais ſi on veut l'enviſager de la manière la plus conforme à la Nature, c'eſt de la première manière qu'il faut l'enviſager, lorſque la force qui fait changer le mouvement, eſt une force active, comme la peſanteur. Et lorſqu'au contraire cette force eſt une réſiſtance, comme celle d'un point fixe, &c. c'eſt de la ſeconde manière qu'il faut l'enviſager.

456. Un corps qui ſe meut en ligne courbe, peut donc à chaque inſtant, être conſidéré comme ſe mouvant ſur la tangente au point où il ſe trouve;

& ſi la force qui le détourne à chaque inſtant, ceſſoit d'agir, il perſévéreroit à ſe mouvoir ſuivant cette tangente.

457. On appelle, en général, force *centrale*, la force qui détourne le corps à chaque inſtant, pour lui faire décrire une ligne courbe. Si en conſidérant le mouvement par rapport à un point fixe, la force tend à approcher le corps de ce point, on l'appelle force *centripète* ; & au contraire on l'appelle force *centrifuge*, lorſqu'elle tend à l'éloigner de ce point.

458. Puiſqu'un corps qui décrit une ligne courbe, ceſſeroit de la décrire, & pourſuivroit ſon mouvement ſuivant la tangente, ſi la force centrale ceſſoit d'agir ; on voit donc qu'à l'égard du point quelconque *A* (*fig.* 33) pris du côté de la concavité, le mobile *M*, en vertu de ſon mouvement ſur la courbe, a véritablement une force centrifuge, puiſque tendant à ſe mouvoir ſuivant *MT*, il tend à s'éloigner du point *A*, vers lequel il ne peut être ramené que par l'action de la force centrale.

Du mouvement dans le Cercle, & de la Force centrifuge.

459. Pour qu'un corps *A* libre & ſans pe-

ſanteur (*fig.* 34) frappé ſuivant la direction quelconque *PA* puiſſe décrire un cercle en vertu de la vîteſſe imprimée & d'une force conſtante & conſtamment dirigée au point fixe *C*; il faut d'abord que la direction *PA* ſoit perpendiculaire à la ligne *AC* qui joint le point *A* de départ, & le point *C*. Mais cette condition ne ſuffit pas; il faut encore que la vîteſſe imprimée ait une certaine meſure.

Suppoſons que la ligne infiniment petite *AB* ſoit l'eſpace qu'il auroit décrit dans un inſtant ſans l'action de la force centrale; & que (454) la ligne infiniment plus petite *AD*, marque l'eſpace que la force centrale agiſſant ſans interruption, lui feroit décrire dans ce même inſtant. Comme *AB* eſt infiniment petite, on peut regarder la force centrale, comme agiſſant ſur le mobile, parallèlement à *AD*; donc ſi l'on mène *Bb* parallèle à *AD*, il faut que la vîteſſe *AB* ſoit telle que la quantité *Bb* dont elle auroit écarté le corps, ſoit égale à celle *AD* dont la force centrale peut le ramener. Voyons donc comment, par cette condition, on peut déterminer le rapport de la force centrale, à la vîteſſe imprimée.

Prolongeons le rayon *AC* juſqu'à ce qu'il rencontre, en *E*, la circonférence. Par la nature du

cercle, on aura $(Db)^2 = AD \times DE$. Mais puiſque AB eſt infiniment petite, DE doit être regardée comme égale à AE ou $2\,CA$, on a donc $(Db)^2$ ou $(AB)^2 = AD \times 2\,CA$.

Repréſentons par V la vîteſſe imprimée; alors (179) nous aurons $AB = V\,dt$. Donc $V^2\,dt^2 = (AB)^2 = AD \times 2CA$.

Repréſentons par g, la vîteſſe que la force centrale feroit naître, en une ſeconde de temps, dans un mobile ſoumis à ſon action ſeule répétée également à chaque inſtant. Alors (166) l'eſpace qu'elle fera décrire pendant l'inſtant dt, ſera $\frac{g\,dt^2}{2}$. On aura donc $AD = \frac{g\,dt^2}{2}$; donc $V^2\,dt^2 = \frac{g\,dt^2}{2} \times 2\,CA$ ou $V^2 = g \times CA$. Soit h la hauteur d'où un corps peſant devroit tomber pour acquérir la vîteſſe V; & p la vîteſſe que la peſanteur donne dans une ſeconde; on aura $V^2 = 2\,ph$ (176). Donc $2\,ph = g \times CA$: ce qui donne $g : p :: 2h : CA :: h : \frac{1}{2}\,CA$; c'eſt-à-dire, que pour qu'un corps libre & ſans peſanteur décrive une circonférence de cercle d'un rayon déterminé, en vertu d'une force dirigée à ſon centre, & d'une vîteſſe primitivement imprimée; il faut que la force centrale ſoit à la peſanteur, comme la hauteur d'où un corps peſant devroit tomber pour

acquérir la vîteſſe imprimée, eſt à la moitié du rayon. Ainſi, ſi la vîteſſe imprimée, & la force centrale n'ont point entr'elles le rapport néceſſaire pour cela, le corps ne peut décrire une circonférence de cercle. Mais ſi ce rapport a lieu, le corps décrira l'arc *A b*.

460. Puiſque la force centrale eſt dirigée au centre *C*, elle eſt perpendiculaire à l'arc; elle ne tend donc ni à augmenter, ni à diminuer la vîteſſe du corps. Donc lorſque le corps ſera arrivé au point *b*, il ſe trouvera à l'égard de la force centrale, dans les mêmes circonſtances qu'au point *A*. D'où l'on conclura que *ſi un corps décrit une circonférence de cercle, en vertu d'une force dirigée au centre, & d'une vîteſſe imprimée; ſa vîteſſe eſt uniforme, & la force centrale eſt conſtante.*

461. Si le corps n'eſt point libre; ſi, par exemple, le corps, *A* (*fig.* 35) eſt retenu au point fixe *C*, par le moyen d'un fil inextenſible, ou d'une verge. Alors ſi on lui donne une impulſion ſuivant quelque direction que ce ſoit, tendante à l'écarter du centre, il décrira néceſſairement la circonférence qui a *C A* pour rayon; & voici comment on doit concevoir que ſe paſſe ce mouvement.

En quelque point *A* que le corps ſoit arrivé,

il tend à ſe mouvoir ſuivant la tangente *AB* (456). Puis donc qu'il ne peut ſuivre ce mouvement, il faut (287) que celui-ci ſe décompoſe en deux autres, l'un *Ab* ſuivant la circonférence, & qui ſera celui qui aura lieu; & l'autre *AD* qui ſoit détruit; il faut donc que ce dernier ſoit dirigé ſuivant *CAD*, puiſqu'il n'y a que la réſiſtance du point fixe pour le détruire. Le mouvement ſe paſſera donc comme dans le cas précédent, avec cette différence ſeulement que la force centrale, au lieu d'être centripète, eſt centrifuge. Ainſi tout ce que nous avons dit du premier cas, a lieu pour celui-ci; c'eſt-à-dire, 1°. que le mouvement ſera uniforme; 2° que la force centrifuge ſera la même en chaque point de la circonférence, ou que le fil ſera conſtamment tendu avec la même force. 3° Que la force centrifuge, ſera à la peſanteur, comme la hauteur d'où un corps peſant devroit tomber pour acquérir la vîteſſe actuelle du mobile *A*, eſt à la moitié du rayon *CA*.

Par exemple, ſuppoſant qu'un corps d'une livre, circule à l'extrémité d'une corde de 5 pieds, avec une vîteſſe de 30,2 pieds par ſeconde. La hauteur dûe à cette vîteſſe étant 15,1 pieds, la force centrifuge de ce corps ſera à ſa peſanteur comme 15,1 : $\frac{5}{2}$: : 30,2 : 5 : : 6,04 : 1 ; donc ce poids d'une livre, tend la corde, comme le feroit un poids immobile de 6 livres & $\frac{4}{100}$; puiſque les forces ou quantités de mouvement que le même corps *A* peut avoir en vertu de ſa peſan-

teur & de ſa force centrifuge, ſont entr'elles, comme les vîteſſes g & p que ces deux forces peuvent engendrer dans un même-temps.

462. Suppoſons que le mobile peſant D (*fig.* 28) retenu au point fixe C par le fil CD, oſcille autour du point C, & décrit en oſcillant des arcs ADI d'une grandeur connue. Si l'on veut ſavoir de combien, lorſqu'il paſſe au point D, ſa force centrifuge augmente l'effort qu'il fait par ſon poids ſur le point C. Il faut mener la perpendiculaire AF; FD ſera (436) la hauteur dûe à la vîteſſe qu'il a en D. Donc (459) la force centrifuge ſera à la peſanteur :: $DF : \frac{1}{2}CA$, c'eſt-à-dire, comme le ſinus verſe de l'arc AD eſt à la moitié du rayon. Ainſi ſi l'arc AD étoit, par exemple, de 10 degrés, dont le ſinus verſe eſt à peu près $\frac{1}{66}$ du rayon; la force centrifuge ſeroit à la peſanteur :: $\frac{1}{66} : \frac{1}{2}$ :: 1 : 33 à peu près; c'eſt-à-dire, que l'effort du poids ſeroit augmenté d'environ $\frac{1}{33}$.

On voit donc par-là que ſi pour tranſporter le tonneau A (*fig.* 36), on l'attache à l'aide d'une corde AC à la barre MN portée ſur les épaules par deux hommes (ainſi que cela ſe pratique en pluſieurs endroits); il y auroit un déſavantage réel dans cette manière de tranſporter les fardeaux ſi l'un des porteurs ne contenoit avec la main les balancemens que le fardeau A peut faire par le mouvement de tranſport. Il faut cependant obſerver que ſi ces balancemens ſont petits, l'augmentation de poids cauſée par la force centrifuge, diminuera dans un beaucoup plus grand rapport que les arcs; il diminuera comme le quarré de la corde de l'arc décrit, ou comme le quarré de cet arc. Ainſi ſi l'arc, au lieu d'être de 10 degrés comme dans l'exemple précédent, n'étoit que d'un degré dont le ſinus verſe eſt $\frac{15}{100000}$ du rayon, l'effet de la force centrifuge ne ſeroit plus que $\frac{1}{100000}$ du poids.

463. Il eſt donc facile maintenant de comparer entr'elles les forces centrifuges de deux mobiles quelconques qui décrivent des circonférences quelconques, avec des vîteſſes données, ou dans des temps donnés.

En effet, l'équation $V^2 = g \times CA$ que nous avons trouvée ci-deſſus, donne $g = \frac{V^2}{CA}$. Or puiſque g exprime la vîteſſe que la force centrale feroit naître, en une ſeconde de temps, dans le mobile, ſi elle agiſſoit ſur lui ſans interruption également à chaque inſtant, $g\,dt$ ſera la vîteſſe qu'elle engendreroit pendant un inſtant; & $A \times g\,dt$, ſera la quantité de mouvement qu'elle donneroit à chaque inſtant; donc cette quantité de mouvement ſera $\frac{A \times V^2\,dt}{CA}$, en mettant pour g ſa valeur. Donc ſi l'on appelle F la force centrifuge abſolue, ou cette quantité de mouvement, pour le corps A, on aura $F = \frac{A \times V^2\,dt}{CA}$; ou bien en nommant R, le rayon CA, $F = \frac{A\,V^2\,dt}{R}$. Donc pour une autre maſſe A' qui décriroit avec une vîteſſe V', une circonférence qui auroit R' pour rayon, on auroit $F' = \frac{A'\,V'^2\,dt}{R'}$, en nommant F' ſa force centrifuge. Donc $F : F' :: \frac{A\,V^2\,dt}{R} :$

$\frac{A' V'^2 dt}{R'}$ ou : : $\frac{A V^2}{R}$: $\frac{A' V'^2}{R'}$; c'eſt-à-dire, en général, que *les forces centrifuges de deux mobiles, ſont entre elles comme les maſſes multipliées par les quarrés des vîteſſes, & diviſées par les rayons des circonférences décrites.*

464. Soient C & C' ces circonférences, T & T' les temps que les deux mobiles emploient à faire une révolution. Puiſque ces mouvemens ſont uniformes, on aura $V = \frac{C}{T}$, & $V' = \frac{C'}{T'}$ (153). Et puiſqu'en repréſentant le rapport du rayon à la circonférence par celui de 1 à c, on a $C = cR$, & $C' = cR'$; donc $V = \frac{cR}{T}$, & $V' = \frac{cR'}{T'}$; ſubſtituant pour V & V' ces valeurs, dans la proportion que nous venons de trouver, on a $F : F' : : \frac{Ac^2R^2}{RT^2} : \frac{A'c^2R'^2}{R'T'^2} : : \frac{AR}{T^2} \frac{A'R'}{T'^2}$; donc *les forces centrifuges ſont comme les maſſes multipliées par les rayons, & diviſées par les quarrés des temps des révolutions.*

465. D'après le rapport que nous avons établi (459) entre la peſanteur & la force centrifuge, on voit donc que lorſqu'un corps ſolide, ou plu-

ſieurs corps ſolides liés entre eux, tournent autour d'un point fixe, les parties de ces corps tendent à ſe déſunir, en s'éloignant du centre; que cet effort peut ſurpaſſer conſidérablement leur poids. Et ce que nous venons de déterminer (464) fait voir que s'ils achèvent leurs révolutions en même temps, leurs forces centrifuges ſont proportionnelles aux maſſes multipliées par les rayons; en ſorte que les parties égales ſont d'autant plus d'effort pour ſe détacher, qu'elles ſont plus éloignées du centre de rotation.

Donc ſi un fluide peſant ou non peſant, circule, les parties font un effort continuel pour s'échapper & s'éloigner du centre, en ſorte que ſi le fluide eſt renfermé dans un vaſe, & que l'on faſſe une ouverture à quelque diſtance du centre que ce ſoit, le fluide s'échappera.

Par exemple, l'eau contenue dans le tambour *ADFC* (*fig.* 37), étant agitée circulairement autour de l'axe *GH*, preſſe la ſurface convexe; & cette preſſion ſe répandant par tout (295), ſi l'on fait une ouverture en quelque point *R*, elle jaillira par cette ouverture.

466. C'eſt d'après ce principe que l'on a imaginé les ſoufflets continus que l'on a propoſé pour renouveler l'air dans les vaiſſeaux ou dans les hôpitaux. Le tambour fixe *ABC*

(*fig.* 38) eſt ouvert dans ſa partie *A C* où il reçoit le tuyau *F A C*. La roue dentée *Z* portée par le montant *D R*, tourne par le moyen de la manivelle *E*, & engrène dans une lanterne *X* dont l'arbre porte les ailes *a e*, *b f*, &c. d'un volan (*fig.* 39) placé dans l'intérieur du tambour. Celles-ci, en tournant, impriment à l'air un mouvement de rotation & une force centrifuge qui l'oblige de ſortir par *F*. Près du centre *X* (*fig.* 38) ſont pluſieurs trous *P*, *Q*, &c. par leſquels il entre de nouvel air, qui à ſon tour eſt chaſſé de même. Ainſi l'ouverture *F* du rayon *F A C* aboutiſſant à l'aide d'un tuyau de cuir ou autrement, hors de la cale, on peut faire ſortir l'air infect, & y faire ſuccéder un air pur. Ceux qui voudront connoître les autres moyens qu'on a imaginés pour purifier ou renouveler l'air dans les vaiſſeaux, peuvent conſulter l'ouvrage de M. Duhamel, qui a pour titre : *Moyens de conſerver la ſanté aux Équipages ;* & un Mémoire de M. Bigot de Morognes, qui a pour titre : *Sur la corruption de l'air dans les vaiſſeaux ; Mémoires préſentés à l'Académie des Sciences, tome I.*

467. Une maſſe fluide dont les parties ne ſeroient ſollicitées par d'autres forces que par une tendance vers un point fixe *C* (*fig.* 40) &, qui auroit une figure ſphérique dont *C* ſeroit le centre, conſerveroit conſtamment cette figure, ſi cette tendance ou peſanteur vers le point *C*, étoit la même à diſtances égales de *C*, cela eſt évident. Mais ſi cette maſſe a en même-temps un mouvement de rotation autour d'une droite quelconque *A B ;* elle ne pourra plus conſerver cette figure. En effet, une particule quelconque *M* décrivant alors, un cercle qui a pour rayon *P M*, a une certaine force centrifuge qui tend à l'éloigner du centre *P*, avec un effort proportionné à ſa diſtance *P M* (464). Donc ſi l'on repréſente

cet effort par Mm, & que l'effort de la peſanteur ou de la tendance vers C ſoit repréſenté par MO; en imaginant le parallélogramme $mMOR$, MR ſera la direction ſuivant laquelle la particule M eſt ſollicitée à ſe mouvoir; & comme la force MO reſtant la même pour chaque particule ſituée à la ſurface, la force Mm varie, & diminue à meſure qu'on s'éloigne du grand cercle ou de l'équateur repréſenté par EQ; il eſt viſible que les forces abſolues MR, qui ſollicitent véritablement ces particules, ſont toutes différentes, & dirigées vers différens points. La maſſe doit donc perdre ſa figure ſphérique; mais quelle que ſoit celle qu'elle pourra prendre, elle doit (297) être telle que la force abſolue MR qui ſollicite chaque particule de la ſurface, ſoit perpendiculaire à cette nouvelle ſurface; donc la nouvelle figure $TVNX$ que prendra la maſſe, doit être telle que MR lui ſoit perpendiculaire; donc cette maſſe doit être applatie vers les pôles X & V, & renflée au contraire dans le ſens de l'équateur qui au lieu d'être EQ, deviendra TN.

Ceci eſt préciſément le cas de la Terre qui, ſoit qu'elle ait été primitivement fluide, ſoit qu'elle ait été en partie ſolide, & en partie fluide, a dû avoir originairement une figure aplatie; ſans quoi, en vertu des forces centrifuges des différentes parties, il y auroit eu un bouleverſement général juſqu'à ce que le tout eût pris la figure aplatie convenable au mouvement de rotation.

MO eſt la vraie direction de la peſanteur, non pas de celle dont nous appercevons les effets; mais de celle qui auroit lieu, ſans la rotation de la Terre. MR eſt celle dont nous appercevons les effets, & c'eſt ſuivant cette ligne que tombent les corps ſitués près de la ſurface de la Terre vers M. Ainſi

la pesanteur actuelle ne sollicite pas les corps à descendre vers le centre de la Terre. Mais comme les observations ont constaté que l'aplatissement de la Terre est petit, eu égard au rayon de l'équateur, le point *S* diffère peu du point *C*.

Comme l'angle *m M O* est nécessairement obtus, il est facile de voir que *M R* est toujours plus petite que *M O*, & d'autant plus petite que le point *M* est plus près de l'équateur; en sorte que la pesanteur va en diminuant depuis les pôles jusqu'à l'équateur. Donc (449) la longueur du pendule qui bat les secondes, n'est pas la même dans tous les lieux de la Terre; elle doit diminuer à mesure qu'on s'approche de l'équateur.

Aux pôles, où la force centrifuge est nulle, la pesanteur agit comme elle le feroit si la Terre étoit immobile. A l'équateur, où la force centrifuge est directement opposée à la pesanteur primitive, la pesanteur est diminuée de toute la quantité de la force centrifuge. Dans les lieux intermédiaires, la diminution de la pesanteur décroît par deux causes; la première, parce que la force centrifuge n'étant pas directement opposée à la pesanteur primitive, n'en consume qu'une partie d'autant moindre que l'arc *M T* est plus grand; la seconde, parce que la force centrifuge diminue à proportion que le point *M* s'éloigne plus de l'équateur.

Du mouvement des Projectiles dans le Vide.

468. On donne, en général, le nom de *Projectile* à tout mobile qui ayant été lancé avec une

une force quelconque & ſuivant une direction quelconque, obéit en même temps à l'action de ſa peſanteur.

Un corps qui auroit été lancé ſuivant une direction quelconque AB (*fig.* 41) dans le vide ou dans un milieu non réſiſtant, & qui en même temps ne ſeroit pas ſoumis à l'action de la peſanteur, conſerveroit (150) éternellement la direction AB, & s'avanceroit ſuivant cette direction, conſtamment avec la même vîteſſe.

Mais ſi le mobile eſt peſant, il ne reſte qu'un inſtant ſur la direction AB. L'action de la peſanteur combinée avec la vîteſſe de projection, change, à chaque inſtant, ſa direction & ſa vîteſſe, & lui fait décrire une ligne courbe qui a pour tangente au point de départ, la ligne AB de projection.

Pour ſe former une juſte idée de la manière dont le projectile eſt mu alors, concevons que ACD eſt la ligne qu'il décrit, & qu'il ſoit actuellement au point F de cette ligne. Si on ſuppoſe que l'arc infiniment petit EF ſoit ce qu'il vient de décrire pendant un inſtant, & qu'on prolonge EF conſidérée comme une ligne droite, d'une quantité $Fg = EF$, il eſt clair (150) que pendant un inſtant égal, il décriroit Fg. Mais comme la peſanteur agit; ſi on ſuppoſe que pendant

ce même inſtant, elle ſoit capable de faire décrire verticalement une ligne telle que Fi, il eſt clair que le projectile lorſqu'il eſt au point F, étant ſoumis à l'action des deux forces Fg & Fi, doit (191) décrire la diagonale Fk du parallélogramme formé ſur Fg & Fi comme côtés contigus. Telle eſt la manière dont le mouvement du corps varie à chaque inſtant.

469. Quoiqu'on puiſſe aſſez facilement conclure la nature & les propriétés de la courbe, de cette manière d'enviſager le mouvement ; néanmoins, comme cette méthode exigeroit quelques intégrations, nous irons au même but par des moyens plus élémentaires, en conſidérant le mouvement comme il ſuit.

470. Si au lieu de concevoir que le mobile eſt peſant, nous le regardons comme ſans peſanteur, & qu'en même temps qu'il ſe meut ſur la ligne AB, nous imaginions que la ligne AB (*fig.* 42) deſcend verticalement & parallèlement à elle-même, ſuivant la loi des corps graves ; il eſt clair que le projectile parcourra la même ligne qu'il parcoure naturellement ; car il ſe trouvera abaiſſé à chaque inſtant au-deſſous de la direction AB, de la même quantité dont il doit l'être en pareil temps par l'action de la peſanteur.

Cela posé, imaginons que AC marque la vîtesse de projection, c'est-à-dire, ce que la force de projection seule est capable de faire décrire au mobile pendant un temps déterminé, pendant une seconde par exemple ; & que AP soit la quantité dont la pesanteur fait descendre un corps libre pendant la première seconde ; soit menée PD parallèle à AB. La ligne AB, dans notre supposition, seroit donc arrivée en PD lorsque le projectile auroit parcouru sur cette ligne la quantité AC ; donc si on mène CM parallèle à AP, le point M sera celui où se trouvera le mobile au bout d'une seconde.

Pareillement, si nous prenons AB double de AC, il est clair qu'au bout de deux secondes le projectile sans pesanteur seroit en B. Et si nous prenons sur la verticale AP, la quantité AP' quadruple de AP, AP', sera (172) la quantité dont la direction AB se sera abaissée au bout de deux secondes ; donc si on mène les lignes BM' & PM' parallèles à AP & à AB, le point M' sera celui où le projectile sera arrivé au bout de deux secondes.

On démontrera de même, que si on prend AO triple de AC, & AP'' neuf fois aussi grand que AP, & que l'on tire les lignes OM', $P''M''$, parallèles à AP & AB, le point M''.

ſera celui où le projectile ſera arrivé au bout de trois ſecondes.

Or d'après cette conſtruction, on voit 1°. que les lignes AP'', AP', AP, ſont entr'elles comme les quarrés des temps. 2°. que les lignes AC, AB, AO, ou leurs égales PM, $P'M'$, $P''M''$, ſont entr'elles comme les temps ; donc les lignes AP, AP', AP'', ſont entr'elles comme les quarrés des lignes correſpondantes PM, $P'M'$, $P''M''$; d'où, & de ce qui a été dit (*Alg.* 301), il ſuit évidemment que la courbe eſt une parabole, puiſque les quarrés des ordonnées PM parallèles à la tangente AB, ſont entr'eux comme les abſciſſes correſpondantes AP.

Pour conclure avec facilité les autres propriétés de cette courbe, généraliſons la conſtruction précédente.

471. Suppoſons que la ligne quelconque AE (*fig.* 43) eſt la vîteſſe imprimée, ou le nombre de pieds que le mobile décriroit par chaque ſeconde s'il conſervoit toujours cette vîteſſe ; & au moment où il part du point A, concevons cette vîteſſe compoſée de deux autres, l'une AD horizontale, & l'autre AF verticale. Il eſt clair que la direction de la peſanteur étant verticale ou perpendiculaire à AD, l'action de la peſanteur ne tend ni à diminuer ni

à augmenter la vîteſſe AD; que par conſéquent, quelque part où ſe trouve le mobile dans la ſuite de ſon mouvement, il conſervera conſtamment une même vîteſſe parallèlement à l'horizon. Quant à la vîteſſe ſuivant AF, lorſque le mobile en vertu de ſa vîteſſe conſtante parallèlement à l'horizon, ſe trouvera s'être avancé d'une quantité quelconque AP, il ne ſe trouvera pas élevé à une hauteur PN égale à celle où il ſeroit arrivé ſans l'action de la peſanteur, mais à quelque point M plus bas, dans la même ligne verticale PN; parce que ſa vîteſſe dans le ſens vertical étant directement contraire à celle de la peſanteur, l'eſpace qu'il décriroit en vertu de cette vîteſſe verticale, doit être diminué de tout ce que l'action de la peſanteur pourroit faire décrire à un mobile, en pareil temps.

Nommons donc V la vîteſſe imprimée ſuivant AZ, ou le nombre de pieds que le projectile décriroit uniformément, à chaque ſeconde, en vertu de cette vîteſſe; & t le temps, ou le nombre de ſecondes ou de parties de ſecondes, qu'il emploieroit à venir de A, au point quelconque N. On aura $AN = Vt$ (154).

Soit p la vîteſſe que la peſanteur donne en une ſeconde de temps; $\frac{pt^2}{2}$ ſera l'eſpace qu'un corps

pesant décrira dans le nombre t de secondes (174). Donc si M est le point où le corps arrive réellement au bout du temps t, on aura $NM = \frac{1}{2} p t^2$.

Par le point A, menons la verticale AX; & par le point M, la ligne MQ parallèle à la tangente AZ; nommons AQ, x'; & QM qui est égale à AN, y'. Nous aurons donc $x' = \frac{1}{2} p t^2$, & $y' = V t$. Si de cette dernière équation, on tire la valeur de t, pour la substituer dans la première, on aura $x' = \frac{\frac{1}{2} p y'^2}{V^2}$, ou $\frac{V^2}{\frac{1}{2} p} x' = y'^2$. Mais (176) $\frac{V^2}{2p}$ exprime la hauteur dont un corps pesant devroit tomber pour acquérir la vîtesse V; donc si on appelle h cette hauteur, on aura $\frac{V^2}{2p} = h$, & par conséquent $\frac{V^2}{\frac{1}{2} p} = 4h$; donc $4hx' = y'^2$. Donc chaque point M de la courbe AMC, a cette propriété, que le quarré de l'ordonnée y' ou QM parallèle à la tangente AZ, est égal au produit de l'abscisse AQ, par une ligne constante $4h$; donc (*Alg.* 301), la courbe AMC est une parabole qui a pour diamètre, la ligne verticale AX; qui a pour paramètre, le quadruple de la hauteur dûe à la vîtesse de projection; & dont l'angle AQM que les ordonnées font avec ce

diamètre, eſt le complément de l'angle de projection ZAC; donc connoiſſant la vîteſſe de projection & l'angle de projection, il ſera facile de conſtruire cette courbe, par ce qui a été dit (*Alg.* 302).

472. Rapportons préſentement les différens points de cette ligne, à la ligne horizontale AC, en menant MP perpendiculaire ſur AC.

Nommons AP, x; PM, y; a l'angle de projection ZAC. Dans le triangle rectangle APN, nous aurons $1 : AN :: \text{ſin. } NAP : PN :: \text{cof. } NAP : AP$; donc $PN = Vt \text{ ſin. } a$, & $AP = Vt \text{ cof. } a$; donc puiſque $MN = \frac{1}{2}pt^2$, ainſi que nous l'avons vu ci-deſſus, on a $PM = Vt \text{ ſin. } a - \frac{1}{2}pt^2$. On a donc $x = Vt \text{ cof. } a$, & $y = Vt \text{ ſin. } a - \frac{1}{2}pt^2$. Tirant de la première, la valeur de t, & la ſubſtituant dans la ſeconde, on aura, toute réduction faite, & en mettant pour $\frac{V^2}{\frac{1}{2}p}$, ſa valeur $4h$, $4hy \text{ cof.}^2 a = 4hx \text{ ſin. } a \text{ cof. } a - xx$, qui nous fournit les propriétés ſuivantes.

473. Comme la vîteſſe imprimée au mobile, ne peut avoir qu'une certaine meſure, ſon effet dans le ſens vertical, doit être épuiſé au bout d'un certain temps, par l'action de la peſanteur; en ſorte qu'il y aura un terme où le corps ceſſera de monter, pour deſcendre enſuite. Mais comme ſa

vîteſſe horizontale n'eſt point altérée ; lorſqu'il ſera arrivé au point B le plus élevé, il décrira la ſeconde branche BC de la même courbe, & viendra rencontrer de nouveau l'horizontale en un autre point C.

474. Pour connoître la diſtance AC, qu'on appelle l'*amplitude du jet*, il eſt viſible qu'il n'y a autre choſe à faire, qu'à ſuppoſer $y = 0$. On aura donc $4hx \text{ ſin. } a \text{ cof. } a - xx = 0$; qui donne $x = 0$, & $x = 4h \text{ ſin. } a \text{ cof. } a$ La première valeur de x, indique le point A ; & la ſeconde eſt celle de AC, que l'on déterminera en prolongeant XA d'une quantité $AK = 4h$; abaiſſant du point K, la perpendiculaire KL ſur AZ, & du point L, la perpendiculaire LC ſur AC ; on aura alors $AC = 4h \text{ ſin. } a \text{ cof. } a$.

Ainſi connoiſſant la vîteſſe de projection & l'angle de projection, il eſt très-facile de calculer l'amplitude. Par exemple, ſi l'on demande quelle ſeroit l'amplitude de la parabole décrite par un projectile lancé avec une vîteſſe de 150 pieds par ſeconde, ſous un angle de 36^d. On trouvera (176) que la hauteur h dûe à la vîteſſe de 150 pieds, eſt $= \frac{(150)^2}{2 \times 30,2} = 372^{pi.},5$; & comme le ſinus de 36^d eſt 0,5878, le rayon étant 1 ; & ſon coſinus $= 0,809$; on aura $AC = 4h \text{ ſin. } a \text{ cof. } a = 1490 \times 0,5878 \times 0,809 = 708^{pi.},6$; ceſt-à-dire, que le corps retomberoit à la diſtance de 709 pieds.

475. La valeur $AC = 4h$ ſin. a coſ. a ne change point ſi au lieu de l'angle a on met ſon complément, puiſque dans ce dernier cas elle devient $AC = 4h$ coſ. a ſin. a, ainſi qu'il eſt évident. Or les deux valeurs a & $90^d - a$ ſont également éloignées de 45^d; donc *les projections faites avec une même charge de poudre, ſous des angles également éloignés de* 45^d, *donnent la même portée.*

476. La même valeur $AC = 4h$ ſin. a coſ. a fait encore voir que depuis 0^d juſqu'à 45^d, les portées vont toujours en augmentant; & que paſſé 45^d elles vont en diminuant, puiſqu'il eſt aiſé de voir que paſſé ce terme, les valeurs de a ſont les complémens de celles qu'on avoit en deçà; donc *de toutes les projections faites avec une même force de poudre, celle de* 45^d *donne la plus grande amplitude.*

477. Puiſque l'angle a eſt alors de 45^d dont le ſinus & le coſinus ſont chacun $= \sqrt{\frac{1}{2}}$, le rayon étant 1; il s'enſuit qu'alors l'amplitude devient $AC = 4h \times \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}} = 4h \times \frac{1}{2} = 2h$; donc *la plus grande amplitude eſt égale au double de la hauteur dûe à la vîteſſe de projection.*

478. On peut auſſi, en employant la méthode donnée (36), trouver le réſultat auquel nous ſommes

parvenus (476). Il faut donc différencier la valeur de AC, en regardant h comme conſtante, & a. comme variable, & égaler la différencielle à zéro. Ainſi, d'après ce qui a été dit (22 & 23), on trouvera $4\,h\,da$ cof.^{2} $a - 4\,h\,da$ ſin.^{2} $a = 0$, d'où l'on tire $\frac{\text{ſin.}^2 a}{\text{cof.}^2 a} = 1$, ou tang.^{2} $a = 1$; donc tang. $a = 1$; l'angle cherché eſt donc celui dont la tangente eſt égale au rayon ; c'eſt donc (*Géom.* 276) l'angle de 45^d.

479. Si on ſavoit avec une exactitude ſuffiſante quelle vîteſſe une quantité de poudre donnée peut imprimer à un projectile connu, il ſeroit donc très-facile de conclure immédiatement l'amplitude. Mais, au défaut de cette connoiſſance, une ſeule expérience ſuffira pour déterminer, à l'aide des principes précédens, l'amplitude de toute autre projection faite avec la même force de poudre.

En effet, ſuppoſons qu'ayant lancé un projectile avec une quantité de poudre connue, & ſous une inclinaiſon connue, on ait meſuré l'amplitude ou la portée ; il ſera très-facile d'en conclure la valeur de h, puiſqu'en repréſentant cette portée par b', & l'angle d'inclinaiſon par a', on aura $b' = 4\,h$ ſin. a' cof. a' ; donc $h = \frac{b'}{4 \text{ ſin. } a' \text{ cof. } a'}$; ſi on ſubſtitue cette valeur de h dans la valeur de AC, que je repréſente par b, on aura $b = \frac{b' \text{ ſin. } a \text{ cof. } a}{\text{ſin. } a' \text{ cof. } a'}$; d'où l'on tire $b : b' :: \text{ſin. } a \text{ cof. } a : \text{ſin. } a' \text{ cof. } a' :$

c'eſt-à-dire, que les portées, à inclinaiſons différentes, ſont comme les ſinus de projection, multipliés par leurs coſinus.

480. D'après ce qui a été dit (*Géom.* 286), il eſt aiſé de voir que ſin. a coſ. $a = \frac{1}{2}$ ſin. $2a$ donc $b : b' :: $ ſin. $2a :$ ſin $2a'$, c'eſt-à-dire, que *les portées ſont entr'elles comme les ſinus du double des angles de projection.*

481. La portée à laquelle on eſt dans l'uſage de comparer toutes les autres, eſt celle de 45 degrés ; donc puiſque, pour cet angle, on a ſin. $2a = 1$, on aura $b : b' :: 1 :$ ſin. $2a'$, & par conſéquent $b' = b$ ſin. $2a'$; c'eſt-à-dire, que *la portée ſous un angle quelconque, eſt égale à la portée ſous 45 degrés, multipliée par le ſinus du double de l'angle de projection.*

482. C'eſt ſous l'angle de 45 degrés qu'on éprouve ordinairement la force de la poudre, & c'eſt avec raiſon ; parce que c'eſt aux environs de 45 degrés que les erreurs que l'on peut commettre dans la meſure de l'angle d'inclinaiſon, produiſent le moindre effet ſur l'étendue de la portée. En effet, dans l'équation $b = 4h$ ſin. a coſ. a, ſi on ſuppoſe que l'on ſe trompe ſur la valeur de a d'une très petite quantité da, & qu'on veuille avoir l'erreur qui en réſultera ſur la portée b ; il

n'y a qu'à différencier en regardant b & a comme variables, & l'on aura $db = 4hda\ \text{cof.}^2 a - 4hda\ \text{fin.}^2 a = 4hda\ (\text{cof.}^2 a - \text{fin.}^2 a)$. Donc l'erreur db ſera d'autant plus petite, que fin. a différera moins de cof. a. Or plus l'angle d'inclinaiſon approche de 45 degrés, & plus en effet fin. a approche de cof. a; donc à 45 degrés les erreurs ſur la portée, réſultantes des erreurs ſur l'angle d'inclinaiſon, ſont les plus petites qu'il eſt poſſible.

483. Propoſons-nous actuellement de déterminer la portée des pièces de *but en blanc*. C'eſt-à-dire, ſuppoſons que la pièce AB (*fig.* 44) ſoit tellement diſpoſée, que ſa ligne de mire CD ſoit horizontale. Le boulet lancé ſuivant la direction ABG de l'axe, décrira la parabole $BLKF$ qui rencontrera la ligne de mire prolongée en deux points L & F, le premier près de la pièce, & le ſecond F plus loin. C'eſt-à-dire, que le boulet parti du point B au-deſſous de la ligne de mire s'élevera au-deſſus de cette ligne, puis s'approchera pour la rencontrer au point F. Il s'agit donc de déterminer la diſtance horizontale DF, ou en imaginant l'horizontale BM, & la verticale FM, il s'agit de déterminer BM.

Soit a l'angle que la ligne de mire fait avec l'axe, c la diſtance de l'axe au point le plus élevé

D du renflement du bourlet ; on aura, en abaiſſant la perpendiculaire BN, $DN = c$ ſin. a, & $BN = c$ coſ. $a = FM$.

L'angle GBM, qui eſt ici l'angle de projection, eſt égal à l'angle BED, & par conſéquent $= a$.

Cela poſé, l'équation de la courbe BKF (472) étant $4hy$ coſ.^{2} $a = 4hx$ ſin. a coſ. $a - xx$; il eſt clair que pour avoir BM, il ne s'agit que de ſubſtituer dans cette équation, au lieu de y, la valeur FM ou c coſ. a, & en tirer la valeur de x. On aura donc $4hc$ coſ.^{3} $a = 4hx$ ſin. a coſ. $a - xx$, qui donne $x = 2h$ ſin. a coſ. $a \pm \sqrt{(4hh}$ ſin.^{2} a coſ.^{2} $a - 4hc$ coſ.^{3} $a)$. Mais comme l'angle a eſt fort petit, il n'y a pas de différence ſenſible entre ſon coſinus & le rayon ; ainſi on peut écrire $x = 2h$ ſin. $a \pm \sqrt{(4hh}$ ſin.^{2} $a - 4ch) = 2h$ ſin. $a \pm 2h$ ſin. $a \sqrt{(1 - \frac{c}{h \text{ ſin.}^2 a})}$. Or comme h eſt toujours une quantité fort grande en comparaiſon des dimenſions de la pièce, la quantité $\frac{c}{h \text{ ſin.}^2 a}$ eſt toujours fort petite, & l'on peut par conſéquent (*Alg.* 133) prendre pour valeur ſuffiſamment approchée de $\sqrt{(1 - \frac{c}{h \text{ ſin.}^2 a})}$, la quantité $1 - \frac{c}{2h \text{ ſin.}^2 a}$; on aura donc $x = 2h$ ſin. $a \pm$

$2h \sin. a \left(1 - \frac{c}{2h \sin.^2 a}\right)$ qui donne ces deux valeurs de x, $x = 4h \sin. a - \frac{c}{\sin. a}$, & $x = \frac{c}{\sin. a}$, dont la dernière donne la distance BO, & la première, la distance BM ou la portée de *but en blanc*.

Si nous mettons au lieu de h, sa valeur trouvée (477), nous aurons pour la portée de *but en blanc*, la quantité $x = 2b \sin. a - \frac{c}{\sin. a}$, b étant la portée à 45 degrés.

Ainsi pour la pièce de 12 légére, dont la portée est d'environ 1800 toises sous 45 degrés ; & dont (*Géom.* 301) l'angle de la ligne de mire avec l'axe, est de $0^d\ 58'$, & $c = 4^{po},926 = 0^{pi.},4105 = 0^{toi.},0684$, on aura $x = 3600 \times \sin. 0^d\ 58' - \frac{0,0684}{\sin. 0^d 58'} = 3600 \times 0,01687 - \frac{0,0684}{0,01687} = 57$ toises à peu-près.

Cette portée diffère beaucoup de la portée de *but en blanc*, connue par l'expérience ; & cela doit être ainsi ; car la portée de 1800 toises sous 45 degrés, que nous employons pour déterminer la portée de *but en blanc*, est beaucoup au-dessous de ce qu'elle seroit dans le vide, & que pour des portées aussi fortes dans l'air, le calcul dans la parabole, seroit tout-à-fait illusoire. Nous en verrons la preuve dans peu.

484. L'équation $4hy \cos.^2 a = 4hx \sin. a \cos. a - xx$, renfermant quatre quantités, fournit la solution de quatre questions différentes, dans lesquelles

trois de ces quatre quantités ſeroient données. De ces quatre queſtions, nous n'examinerons que la ſuivante.

Connoiſſant la force de la poudre, la diſtance horizontale & la hauteur verticale d'un but propoſé, trouver l'inclinaiſon qu'on doit donner au mortier, pour atteindre ce but.

Soit M (*fig.* 45) le but propoſé. Ayant imaginé la perpendiculaire MP; on doit regarder la diſtance AP, & l'angle MAP, comme connus. Soit donc l'angle $MAP = b$, & la diſtance $AP = c$; on aura $MP = \frac{c \text{ ſin. } b}{\text{cof. } b}$. On a donc pour le point M, $x = c$, & $y = \frac{c \text{ ſin. } b}{\text{cof. } b}$. Subſtituant ces valeurs, dans l'équation en x & y, on a $4h$ ſin. b cof.^{2} $a = 4h$ ſin. a cof. a cof. $b - c$ cof b; mais (*Géom.* 287), on a cof. $2a$ = cof. a cof. a — ſin. a ſin. a = cof.^{2} a — ſin.^{2} a = cof.^{2} a — 1 + cof.^{2} a = 2 cof.^{2} a — 1; donc cof.^{2} $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ cof. $2a$. Et (*Géom.* 286) ſin. $2a$ = ſin. a cof. a + ſin. a cof. a = 2 ſin. a cof. a; donc ſin. a cof. $a = \frac{1}{2}$ ſin. $2a$.

Subſtituant ces valeurs, on a $2h$ ſin. $b + 2h$ ſin. b cof. $2a = 2h$ ſin. $2a$ cof. $b - c$ cof. b, ou $2h$ ſin. $2a$ cof. $b - 2h$ ſin. b cof. $2a = 2h$ ſin. $b + c$ cof. b, ou (*Géom.* 286)

$2h$ sin. $(2a - b) = 2h$ sin. $b + c$ cos. b ; donc enfin $\frac{2h}{\text{cos. } b}$ sin. $(2a - b) = \frac{2h \text{ sin. } b}{\text{cos. } b} + c$, qui donne la conſtruction ſuivante.

Ayant élevé ſur AM la perpendiculaire indéfinie AE ; du milieu D de $AK = 4h$, on mènera ſur AK la perpendiculaire DE qui coupera AE en un point E duquel, comme centre, & du rayon EA, on décrira l'arc $ANN'K$, & ayant prolongé PM juſqu'à ce qu'elle rencontre cet arc aux points N & N', ſi on tire ANZ, $AN'Z'$, ces lignes ſeront les deux directions ſuivant leſquelles un mobile étant lancé avec une vîteſſe dûe à la hauteur h, peut également arriver au point M.

En effet, il eſt facile de voir que l'angle EAD du triangle rectangle ADE, eſt égal à MAP. Donc puiſque $AD = 2h$, on a $ED = \frac{2h \text{ sin. } b}{\text{cos. } b}$; & puiſque $AP = c$, on a donc $ED + AP$, ou $EI = \frac{2h \text{ sin. } b}{\text{cos. } b} + c$; donc $\frac{2h \text{ sin. } (2a - b)}{\text{cos. } b} = EI$. Mais dans le même triangle ADE, on a $AE = \frac{2h}{\text{cos. } b}$; donc AE sin. $(2a - b) = EI$.

Concevons l'arc KNA prolongé juſqu'à ce qu'il

qu'il rencontre G, la verticale GE; & des points N & N', menons les perpendiculaires NL, $N'L'$. Dans le triangle NEL, on a $NE : NL$, ou $AE : EI :: 1 :$ ſin. NEG; donc $AE \times$ ſin. $NEG = EI$; donc on a auſſi ſin. $(2a - b) =$ ſin. NEG; & $2a - b = NEG = NEA + b$; donc $a = \frac{1}{2} NEA + b$. Mais à cauſe que l'angle NAM a ſon ſommet à la circonférence, & que AM eſt tangente, on a $NAM = \frac{1}{2} NEA$; d'ailleurs l'angle $MAP = b$; donc $a = NAM + MAP = NAP$; donc le point N ſatisfait à la queſtion.

On prouvera de même, que le point N' y ſatisfait auſſi; parce que dans le triangle $N'EL'$ on a $N'E : N'L'$ ou $AE : EI :: 1 :$ ſin. $N'EL'$ ou $:: 1 :$ ſin. $N'EG$; donc AE ſin. $N'EG = EI$; donc auſſi ſin. $(2a - b) =$ ſin. $N'EG$, & $2a - b = N'EG = NEA + b$; donc $a = \frac{1}{2} N'EA + b = N'AM + MAP = N'AP$.

Si le but étoit au deſſous du niveau de la batterie, on feroit b négatif.

485. Ainſi avec une même force de projection, on peut toujours faire tomber un projectile ſur un même but M, ſuivant deux directions différentes, pourvu que AP n'excède pas DR. La

direction AN' eſt la plus avantageuſe lorſqu'il s'agit d'écraſer avec la bombe, des édifices ou autres objets. La direction AN eſt préférable lorſqu'on ne veut que renverſer, & que le projectile après avoir rencontré le but, puiſſe encore en ſe relevant, ravager à quelque diſtance en formant des *Ricochets*.

486. Déterminons préſentement le temps que le projectile emploie à parvenir au but propoſé.

L'équation $x = Vt \cos. a$ fournit l'expreſſion très-ſimple $t = \frac{x}{V \cos. a}$. Subſtituant dans cette expreſſion, pour x ſa valeur c, & pour V ſa valeur $\sqrt{(2ph)}$, on aura $t = \frac{c}{\cos. a \sqrt{(2ph)}}$. Or nous avons vu ci-deſſus, comment on détermine h, par expérience; & nous ſavons que $p = 30^{pi.}, 2$.

L'expreſſion générale du temps, que nous venons de donner, peut ſervir à régler les fuſées des bombes.

487. Enfin ſi l'on veut ſavoir quelle eſt la plus grande hauteur DB (*fig.* 43) à laquelle le projectile pourra s'élever, on remarquera que DB étant alors un *maximum*, ſa différencielle (36) doit être zéro. On différenciera donc l'équation $4hy \cos.^2 a = 4hx \sin. a \cos. a - xx$, en regardant y & x ſeules comme variables &

égalant dy à zéro, on aura $4hdx$ sin. a cos. $a - 2xdx = 0$; d'où l'on tire $x = 2h$ sin. a cos. a; Cette valeur de x étant substituée dans l'équation, donne $y = h$ sin.^{2} $a = BD$. Disons un mot des *Ricochets*.

488. Le *Ricochet* est ce mouvement par lequel un projectile après avoir rencontré un obstacle quelconque, se relève, se réfléchit pour recommencer un mouvement semblable à celui qu'il avoit d'abord. Plus la direction suivant laquelle le mobile est lancé, fait un petit angle avec l'horizon, & plus (toutes choses d'ailleurs égales) le projectile est dans le cas de faire ricochet; parce qu'alors la force de projection s'exerce presque toute entière dans le sens horizontal, & ne peut être consumée par la résistance de l'air & les autres obstacles, qu'en beaucoup plus de temps. Si le projectile étoit sans ressort; que la surface sur laquelle il tombe, fût horizontale & sans flexibilité, il ne pourroit y avoir de ricochet; parce que la vîtesse du projectile arrivant en C (*fig.* 46) suivant la direction quelconque MC, se décomposeroit en deux autres, dont l'une QC perpendiculaire à la surface, seroit purement & simplement détruite sans aucune restitution, puisqu'il n'y a point de ressort; l'autre vîtesse PC subsisteroit, abstraction

faite du frottement & de la réſiſtance de l'air, & le corps gliſſeroit le long de CZ.

489. Mais ſi au point C (*fig.* 47) où le mobile rencontre la ſurface, il ſe trouve une éminence CE; le mouvement ſuivant MC ſe décompoſera en un mouvement QC perpendiculaire à la ſurface CE de cette éminence, & un autre PC ſuivant cette ſurface, par lequel le mobile s'avancera ſuivant la direction PE, & pourra décrire en quittant le point E une nouvelle courbe de même nature que celle qu'il auroit décrite s'il eût été lancé au point E, ſuivant CE avec la même vîteſſe, en ſorte qu'il s'élevera juſqu'à un certain terme, puis reviendra rencontrer encore la ſurface en un autre point I, où il pourra recommencer un mouvement ſemblable ſi les circonſtances ſont ſemblables.

490. Le ricochet, dont nous venons de parler, dépend donc de la poſition de l'obſtacle que le mobile rencontre. Mais ſi l'obſtacle eſt flexible ou mobile, comme la terre, l'eau, &c. il peut y avoir ricochet, quand même la ſurface ſeroit parfaitement horizontale. En effet, par la vîteſſe verticale QC (*fig.* 48) le mobile tend à s'enfoncer, & s'enfonce plus ou moins, ſelon la nature de l'obſtacle, tandis qu'avec la vîteſſe PC, il laboure

le terrein, & forme un ſillon dont la profondeur augmente juſqu'à ce que la vîteſſe verticale QC ſoit éteinte. Alors la vîteſſe reſtante dans le ſens horizontal, il refoule devant lui la matière qui s'oppoſe, & l'écarte pour ſe frayer un paſſage du côté où il éprouve le moins de réſiſtance; dans ce refoulement, la cavité du ſillon devient à l'égard du mobile, ce que la ſurface CE de la *fig.* 47 étoit dans le cas précédent. Or comme la facilité de ſortir eſt évidemment d'autant plus grande (toutes choſes d'ailleurs égales) que la profondeur totale du ſillon ſera moins grande; & que cette profondeur dépend de la vîteſſe verticale QC, qui ſera d'autant plus petite que l'angle MCP ſera plus petit, ou que l'angle de projection RAZ, aura été plus petit; on voit comment la facilité du ricochet dépend de ce que l'angle de projection ſoit petit.

491. Le ricochet dépend encore beaucoup de la figure du projectile. S'il s'agit, par exemple, d'un ricochet ſur l'eau, & que le projectile ſoit ſphérique, il faut pour qu'il puiſſe y avoir ricochet, que la vîteſſe MC ſoit telle que la vîteſſe verticale QC puiſſe être conſumée avant que le diamètre vertical ſoit entièrement plongé; car dès qu'une fois celui-ci eſt entièrement plongé, la réſiſtance

de l'eau agit également de part & d'autre de la direction du mobile, en ſorte qu'il ne peut plus être détourné que par l'action de la peſanteur qui ne tend elle-même qu'à empêcher le ricochet.

492. Comme l'enfoncement ne ſe fait que ſucceſſivement, il eſt facile de voir que pendant la durée de cet enfoncement, le centre décrit une ligne courbe; parce que la direction ſuivant laquelle ſe fait la réſiſtance, change continuellement. Par exemple, ſi lorſque le centre C (*fig.* 49) après avoir décrit la trace quelconque PC de ſa direction actuelle, on imagine deux tangentes BR, DS parallèles à cette direction; il eſt évident qu'il n'y a que la partie BVL qui éprouve la réſiſtance; & que ſi le corps eſt ſphérique, la réſultante CK de toutes les réſiſtances faites ſur les différens points de BVL, aura une direction qui tend à élever le corps au-deſſus de CI; en ſorte qu'en imaginant le parallélogramme $CIEK$, CE ſera la route que le corps prendra pendant un inſtant au lieu de CI, abſtraction faite de la peſanteur.

493. Enfin ſi le mobile & l'obſtacle ſont flexibles; s'ils ſont à reſſort; ces circonſtances peuvent encore contribuer à faciliter le ricochet. Pour en donner un exemple, prenons un cas très-ſimple; ſuppoſons que

le mobile ſeul eſt flexible & à reſſort, & que ce reſſort ſoit parfait; faiſons de plus, abſtraction de la peſanteur. A l'inſtant où le mobile lancé ſuivant *AC* (*fig.* 50) vient toucher la ſurface, ſa vîteſſe ſe décompoſe en une vîteſſe horizontale *QC* qui ſubſiſtera toujours la même, s'il n'y a point de frottement, & point de réſiſtance de la part du milieu dans lequel le corps ſe trouve. Quant à la vîteſſe perpendiculaire ou verticale *PC*, elle comprime le corps, & ne s'éteignant que ſucceſſivement tandis que la vîteſſe horizontale ſubſiſte, il eſt clair que le centre *C* s'approche du plan *HZ* par des degrés qui vont toujours en décroiſſant, tandis que ceux par leſquels il s'avance parallèlement à *HZ*, demeurent les mêmes. Donc ſi l'on conçoit qu'à chaque inſtant on forme un parallélogramme dont le côté horizontal ſoit au côté vertical, comme la vîteſſe horizontale eſt à la vîteſſe reſtante dans le ſens vertical, la diagonale de ce parallélogramme qui doit, pour chaque inſtant, marquer la route du centre, ſera différente, & différemment ſituée à chaque inſtant, en ſorte que le centre *C* s'approchera de *HZ* en décrivant une ligne courbe pendant le temps de la compreſſion. Lorſque la compreſſion ceſſera de ſe faire, le centre *C* ſera mu pendant un inſtant, ſur la tangente parallèle à *HZ*; après quoi le reſſort ſe débandant, reſtituera

au corps des degrés de vîteſſe par leſquels le centre tendra à s'écarter du plan, de la même manière qu'il s'en eſt approché pendant la compreſſion, & décrira la ſeconde branche RO parfaitement égale à RC. Enfin lorſqu'il ſera arrivé au point O éloigné de HZ d'une quantité égale au rayon IC, il ſe mouvra ſuivant la tangente OT ſituée de la même manière que AC; c'eſt-à-dire, que le choc oblique d'un corps à reſſort contre un plan inflexible & inébranlable, ſe fait (abſtraction faite de la peſanteur) de manière que l'angle de réflexion eſt égal à l'angle d'incidence; chacun de ces deux angles étant meſuré par celui que font, avec le plan horiſontal, les tangentes aux extrémités C & O de la courbe que le centre décrit pendant la compreſſion & la reſtitution du reſſort; courbe qui eſt d'autant plus petite, que cette compreſſion & reſtitution approchent plus d'être inſtantanées.

494. Si l'on a égard à la peſanteur, & que BD ſoit la ligne ſuivant laquelle le corps eſt lancé; il décrira la portion DC de parabole dont AC eſt la tangente, juſqu'à ce qu'il touche le plan; puis lorſque la compreſſion aura ceſſé, il décrira une autre portion OS de parabole, parfaitement égale à la première, & poſée de la même manière.

495. Le frottement contribue encore à la facilité du ricochet, parce qu'il occaſionne dans le mobile une rotation qui le met à même de ſurmonter plus facilement les obſtacles : c'eſt ce qu'on verra encore mieux quand nous aurons parlé du frottement. Telles ſont les cauſes & les circonſtances principales des ricochets.

Quant à la nature de la courbe que décrit le projectile en s'enfonçant, & au rapport de l'angle d'incidence avec l'angle de réfraction; il faudroit connoître la loi de la réſiſtance du milieu dans lequel s'enfonce le projectile. Et il n'y a guère que les fluides proprement dits où cette loi ſoit connue; mais les équations qui peuvent ſervir à déterminer ce mouvement dans les fluides, ne paroiſſant pas ſuſceptibles d'intégration par les méthodes connues, nous n'entreprendrons pas de traiter cette matière plus rigoureuſement.

Du mouvement des Projectiles dans les milieux réſiſtans.

496. Nous venons de voir que lorſque le milieu ne réſiſte pas, la courbe que décrivent les projectiles, eſt une parabole; & que connoiſſant une ſeule portée faite ſous un angle connu, on peut

déterminer facilement quelle ſera la portée ſous toute autre inclinaiſon connue.

Il n'en eſt pas de même lorſque le milieu réſiſte, du moins ſenſiblement; la courbe eſt plus compoſée, & il eſt moins facile de conclure les portées les unes des autres.

497. Quoique l'air, environ 850 fois moins denſe que l'eau, puiſſe paroître, par cette raiſon, ne devoir pas oppoſer une réſiſtance conſidérable au mouvement des projectiles; cependant l'extrême vîteſſe avec laquelle ſont lancés les projectiles en uſage dans l'Artillerie, ne permet guère de douter que la réſiſtance ne puiſſe avoir un rapport ſenſible avec le poids de ces projectiles; & l'on ſent par conſéquent qu'il eſt indiſpenſable d'y avoir égard, lorſqu'on voudra conclure d'une portée connue, celle qui aura lieu pour une autre inclinaiſo.

498. Avant que d'établir aucune théorie ſur ce point, voyons ce que l'expérience nous apprend ſur cette réſiſtance.

Épreuves faites à la Fère, en Juin 1740, avec une pièce de 24, chargée à 9 livres de poudre.

ANGLES de PROJECTION	PORTÉES OBSERVÉES.	Ce qu'auroient dû être les Portées dans le vide, en regardant celle de 15 degrés comme faite dans le vide.
degrés.	toises.	toises.
4	820	467.
15	1675	1675.
20	1740	2153.
25	1825	2566.
30	1910	2901.
35	2020	3148.
40	2050	3300.
45	2200	3350.

La troiſième colonne de cette Table eſt fondée ſur la formule $b = 4h$ ſin. a cof. $a = 2h$ ſin. $2a$ (475 & 480). Suppoſant $a = 15$ degrés, & $b = 1675$, on trouve $h = 1675$. Ainſi la formule devient $b = 3350$ ſin. $2a$.

Suppoſant donc ſucceſſivement $a = 20_d$, $a = 25_d$, &c. on trouve les nombres marqués dans la troiſième colonne.

Cela poſé, la comparaiſon de la ſeconde & de la troiſième colonne, établit bien ſenſiblement une réſiſtance conſidérable de la part de l'air. En effet, 1°. en prenant la portée de 15 degrés comme faite dans le vide, on ſuppoſe la force de la

poudre moindre qu'elle n'eſt réellement ; puiſqu'il eſt évident qu'il a fallu plus de force pour porter à 1675 toiſes dans un milieu réſiſtant, que dans un milieu vide. Il s'enſuit donc que la portée que l'on en conclura pour 4 degrés dans le vide, non-ſeulement doit être plus petite que celle qui auroit lieu dans le même vide avec la véritable force de la poudre, mais qu'elle peut même être plus petite que celle qui aura lieu dans le milieu réſiſtant, ſi l'erreur que l'on commet dans cette ſuppoſition, ſur la force de la poudre, eſt conſidérable ; & c'eſt ce qui a lieu en effet, la portée dans le vide n'étant que de 467 toiſes, tandis que dans le milieu réſiſtant, elle a été trouvée de 810 toiſes.

2°. Quoiqu'il ſoit par-là évident que la force de la poudre ſeroit eſtimée beaucoup au-deſſous de ſa valeur, en regardant la portée ſous 15 degrés comme faite dans le vide, on voit néanmoins par la comparaiſon des autres portées, que la réſiſtance de l'air a conſidérablement altéré ces portées, telles qu'elles ont été obſervées. En effet, la troiſième colonne fait voir qu'avec la force de la poudre eſtimée comme ci-deſſus, c'eſt-à-dire beaucoup plus foible qu'elle n'eſt réellement, les portées auroient dû être conſidérablement plus grandes que ſelon l'expérience. Il eſt donc indubitable que du moins, pour les grandes charges de poudre, la réſiſtance altère tellement les portées, qu'on ne pourroit ſans s'expoſer à commettre des erreurs conſidérablement plus grandes que ce que l'on cherche, conclure ces portées les unes des autres, dans l'hypothèſe ordinaire que la courbe des projectiles eſt une parabole.

499. Voyons préſentement comment la théorie peut nous mettre en état de conclure d'une portée

connue, celle qui doit avoir lieu ſous toute autre inclinaiſon donnée.

Concevons que ABC (*fig.* 51) eſt la courbe cherchée, & que le mobile décrit actuellement l'arc infiniment petit Mm. Sans l'action de la réſiſtance & de la peſanteur, il décriroit dans l'inſtant ſuivant une ligne mq, ſituée ſur le prolongement de Mm. Suppoſons que pendant cet inſtant la réſiſtance puiſſe le retarder de la quantité qn, & que la peſanteur puiſſe le faire deſcendre de la quantité nm' : le point m' ſera donc celui où il arrivera dans le ſecond inſtant.

Menons qr parallèle à la verticale PM, & ns parallèle à l'horizontale AC. Nommons AP, x : PM, y; l'arc AM, s; & ſuppoſons que R & p marquent la réſiſtance & la peſanteur du mobile dans le fluide; c'eſt-à-dire, les vîteſſes que ces forces engendreroient en une ſeconde, ſi elles agiſſoient également à chaque inſtant pendant la durée de cette ſeconde. On aura Rdt & pdt pour les vîteſſes qu'elles engendrent pendant un inſtant (163).

Concevons que la diminution de vîteſſe que produit la réſiſtance, & qu'on peut ſuppoſer repréſentée par qn, ſoit décompoſée en deux autres, l'une qs, verticale; & l'autre qo, horizontale; on aura $nq : sq :: Rdt$ eſt à la diminution de vîteſſe occaſionnée par la réſiſtance dans le ſens vertical; on

aura de même $nq : sn :: Rdt$ eſt à la diminution de vîteſſe dans le ſens horizontal. Or, en tirant Mt parallèle à AC, on a $nq : sq : sn :: Mm : mt : Mt :: ds : dy : dx$; donc la diminution de vîteſſe ſuivant qs ſera $\frac{Rdydt}{ds}$, & celle ſuivant sn, ſera $\frac{Rdxdt}{ds}$. Donc ſi à la ptemière on joint l'action pdt de la peſanteur, on aura $\frac{Rdydt}{ds} + pdt$. & $\frac{Rdxdt}{ds}$ pour les diminutions de vîteſſe tant dans le ſens vertical que dans le ſens horizontal.

Mais tandis que le corps décrit Mm, il s'avance parallèlement à PM de la quantité tm ou dy; & parallèlement à AP, de la quantité Mt ou dx. Donc ſa vîteſſe parallèlement à PM eſt $\frac{dy}{dt}$; & parallèlement à AP, elle eſt $\frac{dx}{dt}$. Donc lorſqu'il décrira mm', ces vîteſſes ſeroient $\frac{dy}{dt} + d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ & $\frac{dx}{dt} + d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, ſi elles alloient en croiſſant; donc $-d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ & $-d\left(\frac{dx}{dt}\right)$ ſont les diminutions de ces vîteſſes. On a donc . . . ; $\frac{Rdydt}{ds} + pdt = -d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, & $\frac{Rdxdt}{ds} = -d\left(\frac{dx}{dt}\right)$. Ce ſont-là les deux équations dont

l'intégration déterminera le mouvement & la courbe. Voyons-en quelques applications.

500. Si la réſiſtance eſt nulle, on a $pdt = -d\left(\frac{dy}{dt}\right)$, & $o = -d\left(\frac{dx}{dt}\right)$, qui donnent, en intégrant, $pt = C - \frac{dy}{dt}$; & $C' = \frac{dx}{dt}$.

Pour déterminer ces deux conſtantes, ſuppoſons que AZ eſt la ligne de projection; que l'angle ZAC ſoit a; & que la vîteſſe de projection ſoit V; on aura V cof. a pour la vîteſſe horizontale initiale; & V ſin. a pour la vîteſſe verticale initiale. Donc les conſtantes C & C' doivent être telles que lorſque $t = o$, on ait $\frac{dx}{dt} = V$ cof. a & $\frac{dy}{dt} = V$ ſin. a. On a donc $o = C - V$ ſin. a, & $C' = V$ cof. a. Donc $pt = V$ ſin. $a - \frac{dy}{dt}$, & V cof. $a = \frac{dx}{dt}$. Donc en intégrant de nouveau, $y = Vt$ ſin. $a - \frac{1}{2} pt^2$, & $x = Vt$ cof. a; intégrales auxquelles nous n'ajouterons point de conſtantes, parce que y & x deviennent zéro dans cette équation lorſque $t = o$, ainſi que cela doit être. Si on ſubſtitue dans la première de ces deux équations la valeur de t tirée de la ſeconde, on aura $y = \frac{x \text{ ſin. } a}{\text{cof. } a} - \frac{\frac{1}{2} p x^2}{V^2 \text{cof.}^2 a}$; ou en ap-

appelant h la hauteur dûe à la vîteſſe V, $y = \frac{x \text{ ſin. } a}{\text{cof. } a} - \frac{x^2}{4h \text{ cof.}^2 a}$ équation qui eſt abſolument la même que nous avons trouvée pour ce cas (472).

501. Suppoſons préſentement que la réſiſtance ſoit proportionnelle au quarré de la vîteſſe; ce qui (375) eſt la loi de la réſiſtance des fluides.

D'après ce qui a été dit (382) nous aurons $n D S u^2 dt$ pour la quantité de mouvement que la réſiſtance détruit pendant un inſtant dt; & par conſéquent, en appelant M la maſſe du projectile, on aura $\frac{n D S u^2 dt}{M}$ pour la vîteſſe qu'elle lui fait perdre dans un inſtant, ou pour valeur de ce que nous venons de repréſenter par $R dt$; donc $R = \frac{n D S u^2}{M}$; faiſons $\frac{n D S}{M} = \frac{p}{k^2}$ & ſubſtituons pour u ſa valeur $\frac{ds}{dt}$: nous aurons $R = \frac{p}{k^2} \times \frac{ds^2}{dt^2}$.

Nos deux équations générales (499) deviendront donc $\frac{p dy ds}{k^2 dt} + p dt = -d\left(\frac{dy}{dt}\right)$ & $\frac{p dx ds}{k^2 dt} = -d\left(\frac{dx}{dt}\right)$.

Pour plus de ſimplicité, ſuppoſons dt conſtant; nous aurons $\frac{p dy ds}{k^2} + p dt^2 = -ddy$, & $\frac{p dx ds}{k^2} = -ddx$.

Subſtituons

Subſtituons dans la première de ces deux équations, la valeur de ds tirée de la ſeconde; nous aurons $\frac{-dy\,ddx}{dx} + p\,dt^2 = -ddy$, ou $p\,dt^2 = \frac{dy\,ddx - dx\,ddy}{dx} = -dx \times d\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Mais l'équation $\frac{p\,dx\,ds}{k^2} = -ddx$, étant multipliée par k^2dt^2, donne $p\,dx\,ds\,dt^2 = -k^2dt^2ddx$. Subſtituant pour pdt^2 ſa valeur $-dx \times d\left(\frac{dy}{dx}\right)$, nous aurons $-dx^2d\left(\frac{dy}{dx}\right)ds = -k^2dt^2ddx$. Or $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = dx\sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)}$; donc enfin $dx^3d\left(\frac{dy}{dx}\right) \times \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = k^2dt^2ddx$ ou $d\left(\frac{dy}{dx}\right) \times \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)} = k^2dt^2 \times \frac{ddx}{dx^3}$; c'eſt-là l'équation qu'il s'agit d'intégrer pour avoir la courbe décrite par le projectile.

502. Comme dt eſt conſtant, le ſecond membre eſt facile à intégrer, & ſon intégrale eſt $\frac{-k^2dt^2}{2dx^2}$. Voyons comment nous intégrerons le premier.

503. Obſervons que $\frac{dy}{dx}$ eſt la tangente de l'angle

que la courbe fait en chaque point avec l'horizontale. Faiſons $\frac{dy}{dx} = \frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}$; ζ ſera la tangente de la moitié de cet angle. En effet d'après ce qui a été dit (*Géom.* 286) ſi a marque un angle quelconque, on a ſin. $2a = 2$ ſin. a cof. a, & cof. $2a =$ cof.$^2 a -$ ſin.$^2 a$; donc $\frac{\text{fin. } 2a}{\text{cof. } 2a}$ ou tang. $2a = \frac{2 \text{ fin. } a \text{ cof. } a}{\text{cof.}^2 a - \text{fin.}^2 a}$, ou en diviſant par cof$^2 a$, tang. $2a = \frac{\frac{2 \text{ fin. } a}{\text{cof. } a}}{1 - \frac{\text{fin.}^2 a}{\text{cof.}^2 a}} = \frac{2 \text{ tang. } a}{1 - \text{tang.}^2 a}$.

504. Cela poſé, ſi nous faiſons en effet $\frac{dy}{dx} = \frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}$, nous aurons $d\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{2(1+\zeta\zeta)}{(1-\zeta\zeta)^2} d\zeta$; & $\sqrt{(1 + \frac{dy^2}{dx^2})} = \sqrt{(1 + \frac{4\zeta^2}{(1-\zeta\zeta)^2})} = \sqrt{(\frac{1+2\zeta^2+\zeta^4}{(1-\zeta\zeta)^2})} = \frac{1+\zeta\zeta}{1-\zeta\zeta}$.

Notre équation deviendra donc $\frac{2(1+\zeta\zeta)^2}{(1-\zeta\zeta)^3} d\zeta = k^2 dt^2 \frac{ddx}{dx^3}$. Or d'après la méthode donnée (103), on trouvera que l'intégrale du premier membre eſt $\frac{\zeta + \zeta^3}{(1-\zeta\zeta)^2} + \int \frac{d\zeta}{1-\zeta\zeta}$

ce que l'on peut d'ailleurs vérifier aiſément par la différenciation.

D'ailleurs, par ce qui a été dit (108 & 111), on trouvera que $\int \frac{dz}{1-zz} = \frac{1}{2}\log.\frac{1+z}{1-z}$; on aura donc $\frac{z+z^3}{(1-zz)^2} + \frac{1}{2}\log.\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = C - \frac{k^2 dt^2}{2dx^2}$.

505. Déterminons d'abord la conſtante C. Nommons I l'angle de projection. Au point de projection, nous aurons $ds : dx :: 1 : \text{cos. } I$, & par conſéquent $dx = ds \text{ cos. } I$; donc $dx^2 = ds^2 \text{ cos}^2. I$.

Soit V la vîteſſe de projection; nous aurons au point de projection $ds = V dt$. Nous aurons donc $dx^2 = V^2 dt^2 \text{ cos}^2. I$, & par conſéquent $\frac{dt^2}{dx^2} = \frac{1}{V^2 \text{ cos}^2. I}$. Soit h la hauteur d'où le projectile devroit tomber dans le vide pour acquérir, en vertu du poids qu'il a dans l'air, la vîteſſe de projection V, on aura $V^2 = 2ph$ (176). Donc $\frac{dt^2}{2dx^2} = \frac{1}{4ph \text{ cos}^2. I}$. Subſtituons cette valeur dans notre équation, en mettant en même temps, tang. $\frac{1}{2} I$ pour z, & nous aurons.....

$$\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}I + \text{tang.}^3\frac{1}{2}I}{(1-\text{tang.}^2\frac{1}{2}I)^2} + \frac{1}{2}\log.\frac{1+\text{tang.}\frac{1}{2}I}{1-\text{tang.}\frac{1}{2}I} =$$

$C - \frac{k^2}{4 p h \cos.^2 I}$, équation qui donnera la valeur de C.

506. Reprenons maintenant notre intégrale ; & ſubſtituons-y pour dt^2 ſa valeur tirée de l'équation $p\,dt^2 = -dx\,d\left(\frac{dy}{dx}\right)$ qui, à cauſe de $\frac{dy}{dx} = \frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}$, devient $p\,dt^2 = -dx \times d\left(\frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}\right)$. Nous aurons $\frac{\zeta+\zeta^3}{(1-\zeta\zeta)^2} + \frac{1}{2}\log.\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right) = C + \frac{k^2\,d\left(\frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}\right)}{2\,p\,dx}$; d'où l'on tire.....

$$\frac{2\,p\,dx}{k^2} = \frac{-\,d\left(\frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}\right)}{C - \frac{\zeta+\zeta^3}{(1-\zeta\zeta)^2} - \frac{1}{2}\log.\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)}.$$

Telle eſt l'équation qu'il s'agit d'intégrer pour avoir la courbe décrite par un projectile dans un milieu réſiſtant dont la denſité ſeroit conſtante.

507. On ne peut, par les méthodes connues, intégrer généralement cette équation. Et les méthodes ordinaires d'approximation ne peuvent avoir ici d'application que pour le cas où elles ſont le moins utiles, c'eſt-à dire, pour le cas où la vîteſſe n'eſt pas conſidérable. Lorſque la vîteſſe eſt fort petite,

la quantité C eſt fort grande ; alors on peut négliger toute la partie variable du dénominateur, & l'équation ſe réduit à $\frac{2pdx}{k^2} = -\frac{1}{C}d\left(\frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}\right)$.

Dans la même ſuppoſition, la valeur de C ſe réduit à $C = \frac{k^2}{4ph\,\text{cof.}^2 I}$; en ſorte qu'on a $dx = -2h\,\text{cof}^2.\,I \times d\left(\frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}\right)$ dont l'intégrale eſt $x = C' - 2h\,\text{cof.}^2\,I \times \frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}$. Or lorſque $\frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}$ ou $\frac{dy}{dx}$ eſt $=$ tang. I, on doit avoir $x = 0$; donc $0 = C' - 2h\,\text{cof}^2.\,I \times \text{tang.}\,I$, & $C' = 2h\,\text{ſin.}\,I\,\text{cof.}\,I$: donc $x = 2h\,\text{ſin.}\,I\,\text{cof.}\,I. - 2h\,\text{cof}^2.\,I \times \frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta} = 2h\,\text{ſin}\,I\,\text{cof.}\,I - \frac{2hdy}{dx} \times \text{cof}^2.\,I$; d'où l'on tire $\frac{x^2}{2} = 2hx\,\text{ſin.}\,I\,\text{cof.}\,I - 2hy\,\text{cof}^2.\,I$, & par conſéquent $4hy\,\text{cof}^2.\,I = 4hx\,\text{ſin.}\,I\,\text{cof.}\,I - xx$; équation qui eſt la même que pour le vide (472) ; en ſorte que quand la vîteſſe eſt fort petite, la courbe eſt une parabole comme dans le vide.

508. Si la vîteſſe, ſans être fort petite, eſt telle néanmoins que C ſoit conſidérablement plus grand que la plus grande valeur de $\frac{\zeta+\zeta^3}{(1-\zeta\zeta)^2}$ +

$\frac{1}{2}$ log. $\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right)$; alors on peut intégrer par approximation en faisant la division (*Alg.* 135) du numérateur $-d\left(\frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}\right)$ par le dénominateur $C - \frac{\zeta+\zeta^3}{(1-\zeta\zeta)^2} - \frac{1}{2}$ log. $\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$, en regardant celui-ci comme un binome, dont le premier terme est C. Après quoi réduisant $\frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}$, $\frac{\zeta+\zeta^3}{(1-\zeta\zeta)^2}$, & log. $\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$ en série, on a pour valeur de $\frac{2pdx}{k^2}$, une suite de monomes faciles à intégrer, & qui forme une série d'autant plus convergente, que C est plus grand. Mais nous nous arrêterons d'autant moins à cette sorte d'approximation, qu'outre qu'elle est bornée à un petit nombre de cas, ces cas seront d'ailleurs compris dans l'approximation suivante.

509. Réduisons d'abord en série la quantité $\frac{1}{2}$ log. $\frac{1+\zeta}{1-\zeta}$. Nous aurons (87) .....

$$\frac{1}{2}\log.\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right) = \zeta + \frac{\zeta^3}{3} + \frac{\zeta^5}{5} + \frac{\zeta^7}{7} + \frac{\zeta^9}{9} + \frac{\zeta^{11}}{11} \&c,$$

Multiplions cette quantité par $(1-\zeta\zeta)^2$, & ajoutons le produit au numérateur de $\frac{\zeta+\zeta^3}{(1-\zeta\zeta)^2}$; nous aurons.....

$$\frac{2\zeta - 2\zeta^3 + \frac{8}{3}\zeta^5 + \frac{8}{15}\zeta^7 + \frac{8}{105}\zeta^9 + \frac{8}{315}\zeta^{11} \&c,}{(1-\zeta\zeta)^2}$$

Notre équation deviendra donc.....

$$\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\left(\frac{2\xi}{1-\xi\xi}\right)}{C - \frac{2\xi - 2\xi^3 + \frac{4}{7}\xi^5 + \frac{8}{15}\xi^7 + \&c.}{(1-\xi\xi)^2}},$$

que l'on peut réduire à.....

$$\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\left(\frac{2\xi}{1-\xi\xi}\right)}{C - \frac{2\xi}{1-\xi\xi}\left(1 + \frac{\frac{2}{3}\xi^2 + \frac{4}{15}\xi^4 + \frac{4}{105}\xi^6 + \&c.}{1-\xi\xi}\right)}.$$

510. Cela posé, si la quantité $1 + \frac{\frac{2}{3}\xi^2 + \frac{4}{15}\xi^4 \&c.}{1-\xi\xi}$ étoit constante ; ou si, sans s'exposer à commettre des erreurs beaucoup plus grandes que celles qui peuvent arriver dans la pratique, on pouvoit supposer que la quantité $1 + \frac{\frac{2}{3}\xi^2 + \frac{4}{15}\xi^4 \&c.}{1-\xi\xi}$ est égale à une constante a, l'équation s'intégreroit fort aisément, puisqu'alors on auroit $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\left(\frac{2\xi}{1-\xi\xi}\right)}{C - \frac{2a\xi}{1-\xi\xi}}$ dont le second membre est un différencielle logarithmique. Voyons donc jusqu'à quel point on peut supposer que la quantité $1 + \frac{\frac{2}{3}\xi^2 \&c.}{1-\xi\xi}$ est constante.

511. Comme ξ marque la tangente de la

moitié de l'angle que la courbe fait avec l'horizon en un point quelconque, ſa plus grande valeur dans la branche deſcendante, eſt la tangente de la moitié de l'angle de projection. Suppoſons, par exemple, que l'angle de projection ſoit de 25 degrés ; le terme $\frac{\frac{3}{1}\tau^2}{1-\tau\tau}$ ou $\frac{2\tau}{1-\tau\tau}\times\frac{1}{3}\tau$, qui eſt beaucoup plus grand que les ſuivans, ſera tang. $25^d \times \frac{1}{3}$ tang. $12^d\ 30'$; or cette quantité revient à environ 0,034 ; ainſi, dans toute l'étendue de la branche aſcendante, la quantité $1+\frac{\frac{3}{1}\tau^2+\frac{4}{15}\tau^4 \&c.}{1-\tau\tau}$ ne varieroit que depuis environ 1,034 juſqu'à 1. Donc, au moins juſqu'à 25 degrés, on peut ſuppoſer ſans beaucoup d'erreur, que $1+\frac{\frac{3}{1}\tau^2+\frac{4}{15}\tau^4}{1-\tau\tau}$ eſt une quantité conſtante.

512. Pour ſavoir quelle eſt la quantité conſtante la plus convenable à ſubſtituer à la place de $1+\frac{\frac{3}{1}\tau^2 \&c.}{1-\tau\tau}$, je remarque que, puiſque la viteſſe de projection eſt fort grande, la branche aſcendante doit dans ſa plus grande partie AC (*fig.* 52), être ſenſiblement rectiligne, & que par conſéquent τ doit y conſerver à très-peu près ſa valeur initiale dans toute l'étendue AC. Donc la ſuppoſition convenable eſt de faire $\tau = \text{tang.}\ \frac{1}{2} I$.

513. Ainſi 1°. pour les projections faites ſous des angles peu au-deſſus de 25 degrés, l'équation $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\left(\frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}\right)}{C - \frac{2a\zeta}{1-\zeta\zeta}}$ repréſente la courbe avec une exactitude ſuffiſante, du moins quant à la partie aſcendante, en ſuppoſant $a = 1 + \frac{\frac{3}{5}\text{tang.}^2\frac{1}{2}I + \frac{4}{11}\text{tang.}^4\frac{1}{2}I, \text{ \&c.}}{1 - \text{tang.}^2\frac{1}{2}I}$.

514. A l'égard de la partie deſcendante; quoique ζ doive, après avoir paſſé le point D, où l'inclinaiſon eſt la même qu'au point A, avoir des valeurs de plus en plus grandes; cependant l'erreur qui peut réſulter de notre ſuppoſition, n'influe pas ſur cette branche autant que ſur la première. Car ζ étant alors négatif, le dénominateur $C - \frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}(1 + \text{\&c.})$ au lieu d'être la différence des deux quantités, eſt leur ſomme, & par conſéquent, l'erreur ſur ce dénominateur influe d'autant moins ſur la valeur de la fraction. Donc à moins que la courbe ne dût, au point de chute E, faire un très-grand angle avec l'horizon, on pourra prendre l'équation $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\left(\frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}\right)}{C - \frac{2a\zeta}{1-\zeta\zeta}}$ pour celle de la courbe entière.

515. Examinons plus particulièrement ce que notre approximation peut produire sur les portées.

La valeur $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\left(\frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}\right)}{C-\frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}(1+\&c)}$ devenant la plus petite qu'il eſt poſſible, lorſque $\zeta = 0$; c'eſt-à-dire, au ſommet de la courbe, fait voir que $\frac{2px}{k^2}$ eſt la différence entre une certaine conſtante, & l'intégrale de $\frac{d\left(\frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}\right)}{C-\frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}(1+\&c.)}$, c'eſt-à-dire, que

$$\frac{2px}{k^2} = C' - \int \frac{d\left(\frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}\right)}{C-\frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}(1+\&c.)}.$$

Donc, ſelon que notre approximation rendra la quantité ſous le ſigne $\int$ trop grande ou trop petite, la portée ſera, au contraire, trop petite ou trop grande.

516. Or nous ſuppoſons à a dans la quantité $\frac{-d\left(\frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}\right)}{C-\frac{2a\zeta}{1-\zeta\zeta}}$, une valeur qui, dans la branche aſcendante, eſt véritablement plus grande que le facteur auquel nous la ſubſtituons, & qui augmente,

par conſéquent, la quantité ſous le ſigne $\int$. Donc pour la branche aſcendante, notre approximation tend à donner les portées plus petites que dans un milieu d'une denſité uniforme.

517. Dans la branche deſcendante, où ζ eſt négatif, l'équation devient $2px = C' + \int \frac{d\left(\frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}\right)}{C + \frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}(1 + \&c.)}$; la valeur de a y eſt encore trop grande depuis B (*fig.* 52) juſqu'au point D où l'inclinaiſon redevient la même qu'au point A, & par conſéquent notre approximation rend encore la portée trop petite. Mais paſſé le point D, la valeur de a eſt trop petite, & rend par conſéquent la quantité ſous le ſigne $\int$ trop grande ; ce qui augmente la portée.

Mais comme l'augmentation qui ſe fait de D en E, ne peut pas compenſer la diminution qui ſe fait de A en D, il s'enſuit qu'en général, notre approximation donneroit les portées trop courtes, ſi nous avions la valeur exacte de C.

Cependant comme la conſtante C' n'eſt déterminée que par approximation, ſa valeur contribue à compenſer en très-grande partie ce que la ſuppoſition ſur la valeur de a, peut introduire d'altération ; en ſorte que, même pour des angles

assez grands, les portées seront, en général, assez exactes, dans la supposition d'une densité uniforme.

518. Il ne seroit pas bien difficile de rendre notre approximation beaucoup plus rigoureuse, en donnant une autre forme au dénominateur de la valeur de dx; mais nous ne nous livrerons à cette recherche que sur la fin de ce volume, parce que l'équation devenue plus exacte pour les portées qui auroient lieu dans un milieu uniforme, n'en seroit pas pour cela beaucoup plus conforme à l'expérience, si en même temps nous ne donnions pas le moyen d'avoir égard au changement de densité. Or cette recherche nous mèneroit trop loin pour le présent.

519. Venons donc à l'équation finale.

Donnons d'abord à C, & au facteur a, la forme la plus commode pour le calcul numérique.

Nous avons $a = 1 + \dots$

$$\frac{\frac{2}{3}\,\text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}I + \frac{4}{15}\,\text{tang.}^4\,\tfrac{1}{2}I + \frac{4}{105}\,\text{tang.}^6\,\tfrac{1}{2}I\ \&c.}{1 - \text{tang.}^2\,\tfrac{1}{2}I.}$$

Nous pouvons donner à a cette autre forme,

$$a = 1 + \frac{2\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}I}{1 - \text{tang.}^2\,\frac{1}{2}I} \times \dots$$

$$(\tfrac{1}{3}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}I + \tfrac{2}{15}\,\text{tang.}^3\,\tfrac{1}{2}I + \tfrac{2}{105}\,\text{tang.}^5\,\tfrac{1}{2}I\ \&c.),$$

& puisque $\frac{2\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}I}{1 - \text{tang.}^2\,\frac{1}{2}I} = \text{tang.}\,I$, nous aurons

$$a = 1 + \text{tang.}\,I \times \dots$$

$$(\tfrac{1}{3}\,\text{tang.}\,\tfrac{1}{2}I + \tfrac{2}{15}\,\text{tang.}^3\,\tfrac{1}{2}I + \tfrac{4}{105}\,\text{tang.}^5\,\tfrac{1}{2}I\ \&c.)$$

A l'égard de C, nous avons trouvé ci-dessus $C = \frac{k}{4ph\cos.^2 I} + \frac{\text{tang.}\frac{1}{2}I + \text{tang.}^3\frac{1}{2}I}{1 - \text{tang.}^2\frac{1}{2}I} + \frac{1}{2}\log.\left(\frac{1+\text{tang.}\frac{1}{2}I}{1-\text{tang.}\frac{1}{2}I}\right)$; or en réduisant en série, & raisonnant comme nous l'avons fait ci-dessus (509 & *suiv.*) pour ζ, nous trouverons $C = \frac{k^2}{4ph\cos.^2 I} + \frac{2\,\text{tang.}\frac{1}{2}I}{1-\text{tang.}^2\frac{1}{2}I}\left(1 + \frac{\frac{2}{3}\text{tang.}^2\frac{1}{2}I + \frac{4}{15}\text{tang.}^4\frac{1}{2}I + \&c.}{1-\text{tang.}^2\frac{1}{2}I}\right)$; c'est-à-dire, $C = \frac{k^2}{4ph\cos.^2 I} + a\,\text{tang.}\,I$.

520. Cela posé, nous avons donc.....

$$\frac{2p\,dx}{k^2} = -\frac{d\left(\frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}\right)}{C - \frac{2a\zeta}{1-\zeta\zeta}}$$ dont l'intégrale (100).

est $\frac{2px}{k^2} = C' + \frac{1}{a}\log.\left(C - \frac{2a\zeta}{1-\zeta\zeta}\right)$.

Pour déterminer la constante C', je remarque qu'au point de projection A (*fig.* 52) on doit avoir $x = 0$; or au point A on a $\frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta} = \text{tang.}\,I$; donc $0 = C' + \frac{1}{a}\log.(C - a\,\text{tang.}\,I)$; & par conséquent $C' = -\frac{1}{a}\log.(C - a\,\text{tang.}\,I) = \frac{1}{a}\log.\frac{k^2}{4ph\cos.^2 I}$, en mettant pour C sa valeur.

Donc $\frac{2px}{k^2} = \frac{1}{a}\log.\frac{4ph\cos.^2 I}{k^2}\left(C - \frac{2a\zeta}{1-\zeta\zeta}\right)$.

Donc en prenant e pour le nombre dont le logarithme est 1, on aura.....

$e^{\frac{2apx}{k^2}} = \frac{4ph\cos.^2 I}{k^2}\left(C - \frac{2a\xi}{1-\xi\xi}\right)$,

& $\frac{2\xi}{1-\xi\xi} = \frac{1}{a}\left(C - \frac{k^2}{4ph\cos.^2 I}e^{\frac{2apx}{k^2}}\right)$.

Mais on a $\frac{dy}{dx} = \frac{2\xi}{1-\xi\xi}$; donc $dy = \frac{Cdx}{a} - \frac{k^2 dx}{4aph\cos.^2 I}e^{\frac{2apx}{k^2}}$. Intégrant de nouveau, & déterminant la conſtante par la condition que y ſoit zéro, lorſque x ſera zéro, on aura.....

$y = \frac{Cx}{a} + \frac{k^4}{8a^2p^2h\cos.^2 I}\left(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}}\right)$, ou, en mettant pour C ſa valeur.....

$y = (\text{tang.}I + \frac{k^2}{4aph\cos.^2 I})x + \frac{k^4}{8a^2p^2h\cos.^2 I}(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}})$.

Telle eſt l'équation réſultante de la première approximation par laquelle on peut déterminer les portées depuis les plus petites vîteſſes juſqu'à celles au moins que ſuppoſe la Table des épreuves rapportées ci-deſſus (*page* 155).

521. Si la réſiſtance eſt petite, & qu'en même-temps la vîteſſe de projection ſoit médiocre; en ſorte que l'amplitude doive être ſenſiblement plus petite que $\frac{k^2}{2ap}$; alors la plus grande valeur de $\frac{2apx}{k^2}$ ſera une petite fraction, & l'on pourra au lieu de $e^{\frac{2apx}{k^2}}$ prendre ſa valeur (90) approchée $1 + \frac{2apx}{k^2} + \frac{2a^2p^2x^2}{k^4} +$

$\frac{4a^3p^3x^3}{3k^6}$, &c. L'équation deviendra $y = x$ tang. $I + \frac{k^2x}{4aph\ \text{cos.}^2 I} - \frac{k^2x}{4aph\ \text{cos.}^2 I} - \frac{x^2}{4h\ \text{cos.}^2 I} - \frac{apx^3}{6k^2h\ \text{cos.}^2 I}$, &c. qui se réduit à $y = x$ tang. $I - \frac{x^2}{4h\ \text{cos.}^2 I} - \frac{apx^3}{6k^2h\ \text{cos.}^2 I}$, &c.

Et si la résistance est absolument nulle, en sorte que $\frac{p}{k^2} = 0$, on a $y = x$ tang. $I - \frac{x^2}{4h\ \text{cos.}^2 I}$, ou $4hy\ \text{cos.}^2 I = 4hx\ \text{sin.}\ I\ \text{cos.}\ I - xx$, équation qui est absolument la même que celle que nous avons trouvée (472), ainsi que cela doit être.

522. Si la résistance, sans être absolument nulle, est telle néanmoins que $\frac{k^2}{2ap}$ doive être plus grand que x, x étant l'amplitude; on pourra déterminer la courbe à l'aide de la série $y = x$ tang. $I - \frac{x^2}{4h\ \text{cos.}^2 I} - \frac{apx^3}{6k^2h\ \text{cos.}^2 I}$, &c. prolongée suffisamment, selon le degré de petitesse de la fraction $\frac{2apx}{k^2}$. Mais à moins que $\frac{2apx}{k^2}$ ne soit une fraction assez petite, il sera plus court & plus exact d'employer l'équation exponentielle ci-dessus.

523. Nous allons voir, tout-à-l'heure, que pour l'épreuve sous 15 degrés, rapportée dans la Table ci-dessus, on a $\frac{2ap}{k^2} = 0{,}0016597$; & comme cette même épreuve donne $x = 1675$, on a donc ..... $\frac{2apx}{k^2} = 2{,}78$ à très-peu près; donc pour les portées

compriſes dans cette même Table, on ne peut pas faire uſage de la ſérie $y = x \text{ tang. } I - \frac{x^2}{4h \text{ cof.}^2 I} - \frac{ap x^3}{6k^2 h \text{ cof.}^2 I}$, &c. qui ſeroit divergente.

524. Voyons préſentement juſqu'à quel point cette théorie s'accorde avec l'expérience.

Nous avons entendu par p, la peſanteur du projectile dans l'air; ou plutôt la vîteſſe que recevroit, en une ſeconde de temps, le projectile tombant dans le vide, mais avec la diminution du poids du volume d'air dont il occupe la place (312).

Soit $2r$ le diamètre du boulet; $1 : c$ le rapport du diamètre à la circonférence; on aura $\frac{4}{3} cr^3$ pour le volume du boulet. Donc D étant la denſité de l'air, & D' celle du boulet, on aura $\frac{4}{3} D'cr^3$ pour la maſſe du boulet, & $\frac{4Dcr^3}{3}$ pour celle du volume d'air dont il occupe la place.

Soit p' la vîteſſe que la peſanteur donne, en une ſeconde de temps, à un corps libre; $p'dt$ ſera celle qu'elle donne en un inſtant; ainſi $\frac{4D'cr^3}{3} p'dt$ ſera le poids du boulet dans le vide, & $+\frac{D'cr^3}{3} p'dt$ ſera celui du volume d'air dont il occupe la place; donc..... $\frac{4cr^3}{3} p'dt\ (D' - D)$ ſera le poids du boulet dans l'air; diviſant donc par la maſſe $\frac{4cr^3}{3} D'$ du boulet, on aura $p'dt \left(\frac{D' - D}{D'}\right)$ pour la vîteſſe que la peſanteur donne réellement dans l'air au boulet pendant

un

un inſtant ; on aura donc $p' dt \left(\frac{D'-D}{D'}\right) = p\,dt$,

ou $p = \frac{D'-D}{D'}\, p'$.

La peſanteur ſpécifique de l'air eſt la 850e partie de celle de l'eau ; celle du fer fondu eſt à celle de l'eau : : 7,114 : 1 ; donc $D' : D :: 6047 : 1$; donc $p = \frac{6046}{6047}\, p'$. Comme cette fraction diffère extrêmement peu de l'unité, nous prendrons $p = p' = 30^{P}$, $2 = 5^{T},03333$, dont le logarithme eſt $\log. p = 0,7018556$.

Nous avons ſuppoſé $\frac{n D S}{M} = \frac{p}{k^2}$. Or (382) $n = \frac{1}{3}$; & (396) $S = \frac{1}{2} S'$, S' étant la ſurface du grand cercle du boulet. D'ailleurs $S' = c r^2$; donc $S = \frac{1}{2} c r^2$. Nous venons de voir que $M = \frac{4}{3} c r^3 D'$. Subſtituant ces valeurs, nous aurons $\frac{n D S}{M} = \frac{p}{k^2} = \frac{3}{8} \times \frac{D}{D'} \quad \frac{1}{2r}$.

Or nous avons $\frac{D}{D'} = \frac{1}{6047}$, $2r = 5^{P0},444 = 0^{P},453666$ $= 0^{T},075611$. D'où l'on conclura $\log. \frac{p}{k^2} = 6,9139057$.

525. Propoſons-nous d'abord de déterminer la force de la poudre, c'eſt-à-dire la hauteur h dûe à la vîteſſe du boulet au ſortir de la pièce.

Comme la première épreuve rapportée dans la Table ci-deſſus, a été faite ſous 4 degrés, qui eſt un fort petit angle, ce ſeroit bien la plus propre à notre objet, ſi l'on étoit bien aſſuré que le boulet au ſortir de la pièce ſuivoit exactement une direction inclinée de 4 degrés à l'horizon ; mais une pe-

tite erreur ſur cet angle, devenant comparable à cet angle même, pourroit nous donner une meſure trop fautive, de la force de la poudre. L'angle de 15 degrés eſt d'un degré de petiteſſe qui permet d'y appliquer légitimement notre calcul, & en même-temps aſſez grande, pour que l'incertitude qu'il pourrait y avoir ſur la différence de la vraie direction du boulet, à cet angle, ne puiſſe pas avoir d'effet ſenſible ſur la meſure que nous cherchons.

Prenons donc la portée 1675 que l'on a trouvée ſous 15 degrés; c'eſt-à-dire ſuppoſons $x = 1675$. Alors dans l'équation $y = x\left(\text{tang. } I + \frac{k^2}{4aph\,\text{cos.}^2 I}\right) + \frac{k^2}{8a^2p^2h\,\text{cos.}^2 I}\left(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}}\right)$, ſi nous faiſons $y = 0$, & $x = 1675$, la valeur de h ſera celle qui réſultera de l'équation $0 = 1675\left(\text{tang. } I + \frac{k^2}{4aph\,\text{cos.}^2 I}\right) + \frac{k^4}{8a^2p^2h\,\text{cos.}^2 I}\left(1 - e^{\frac{2ap}{k^2}\times 1675}\right)$.

Nous connoiſſons $\frac{k^2}{p}$; tang. I & cos. I ſont faciles à trouver par les Tables; il n'y a donc que a à calculer. Cela poſé, ont trouvera ... log. tang. $15^d\ 0' = 9{,}4280525$.
log. cos. 15. 0 = 9,9849438.
tang. 15. 0 = 0,26795.
log. tang. 7. 30 = 9,1194291.

Donc
puiſqu'on a $a = 1 + \text{tang. } I\left(\frac{1}{3}\text{ tang.}^2\frac{1}{2}I + \frac{2}{15}\text{ tang.}^4\frac{1}{2}I + \text{&c.}\right)$
on procèdera ainſi au calcul;

long. tang. $\frac{1}{2}I$ ....9,1194291.	log. tang.$^4\frac{1}{2}I$ ...7,3582873.
comp.^{t} log. 3....9,5228787.	log. 2.....0,3010300.
log. $\frac{1}{3}$ tang. $\frac{1}{2}I$....8,6423078.	comp. log. 15....8,8239087
	log. $\frac{2}{15}$ tang.$^4\frac{1}{2}I$..6,4832269.

Donc $\frac{1}{3}$ tang. $\frac{1}{2}I + \frac{2}{15}$ tang.$^3\frac{1}{2}I = 0{,}04389 + 0{,}00030 = 0{,}04419$

Log. 0,04419 . . . 8,6453240.
Log. tang. I . . . . . 9,4280525.

Donc log. tang. $I(\frac{1}{3}$ tang. $\frac{1}{2}I + \frac{2}{15}$ tang.$^3\frac{1}{2}I)$ . . . 8,0733765.
qui répond à . . . . . 0,01184.
Donc $a = 1{,}01184$, & log. $a = 0{,}0051119$.
Cela posé, on a . . . . . log. $\frac{k^2}{p} = 3{,}0860943$.
Compl. log. a . . . . . 9,9948881.
Compl. log. 2 . . . . . 9,6989700.

donc Log. $\frac{k^2}{2ap}$ . . . . . 2,7799524.

& Log. $\frac{2ap}{k^2}$ . . . . . 7,2200476.
Log. 1675 . . . . . 3,2240148.

Log. $\frac{2ap}{k^2} \times 1675$ . . . 0,4440624.
qui répond à . . . . . 2,780412.

De plus . . . . . log. $\frac{k^2}{2ap}$ . . . 2,7799524.
Compl. log. 2 . . . 9,6989700.

Log. $\frac{k^2}{4ap}$ . . . 2,4789224.
Compl. log. cos.^2I . . . 0,0301124.

Log. $\frac{k^2}{4ap\cos.^2I}$ . . . 2,5090348.
Log. $\frac{k^2}{2ap}$ . . . . . 2,7799524.

Log. $\frac{k^4}{8a^2p^2\cos.^2I}$ 5,2889874

Donc $\frac{k^4}{8a^2p^2\cos.^2I} = 194530{,}27$.

D'ailleurs . . . . . log. $\frac{k^2}{4\,a\,p\,\text{cos.}^2\,I}$ . . . 2,5090348.

log. 1675 . . . . . 3,2240148.

Log. $\frac{1675\,k^2}{4\,a\,p\,\text{cos.}^2\,I}$ . . . . 5,7330496.

Donc $\frac{1675\,k^2}{4\,a\,p\,\text{cos.}^2\,I} = 540816.$

Enfin log. tang. I . . . . . 9,4280525.

log. 1675 . . . . . 3,2240148.

log. 1675 tang. I . . . 2,6520673.

Donc 1675 tang. I = 448,815.

notre équation devient donc . . . . . .

$$o = 448{,}815 + \frac{540816}{h} + \frac{194530{,}27}{h}\left(1 - e^{2{,}780112}\right).$$

Or, en général, e^b exprime le nombre qui a b pour logarithme hyperbolique, & par conséquent (88) le nombre qui a $b \times 0{,}4342945$ pour logarithme ordinaire. Multipliant donc 2,780112 par 0,4342945, on aura 1,2073873 pour le logarithme ordinaire de $e^{2{,}780112}$; or ce logarithme répond à 16,120829 : donc . . . . . $o = 448{,}815 + \frac{540816}{h} - \frac{194530{,}27 \times 15{,}120829}{h}$ ou $o = 448{,}815 - \frac{2400643}{h}$;

donc . . . . . $h = \frac{2400643}{448{,}815} = 5348^{T},85$; & son logarithme ou log. h = 3,7281603.

526. On voit donc qu'un boulet de 24, à la charge de 9^{lt} de poudre, part avec une vîteſſe initiale dûe à la hauteur de 5348^{T}, 85 ou de 32093 pieds. Or un corps tombant de cette hauteur dans le vide, acquerroit (176) une vîteſſe de 1393 pieds par ſeconde. Donc une charge de 9^{lt} de poudre donne au boulet de 24, au ſortir de la pièce, une vîteſſe de 1393 pieds par ſeconde.

527. On voit par-là 1°. la confirmation de ce que nous avons dit (421) ſur la force de la poudre. 2°. La différence prodigieuſe qui en réſulte pour l'eſtimation de la force de la poudre. En effet, en regardant la portée ſous 15 degrés comme faite dans le vide, la hauteur h ſeroit de 1675 toiſes; au lieu qu'ici elle eſt de 5349 toiſes. 3°. Que quoique d'après la comparaiſon de la ſeconde & de la troiſième colonne de la Table donnée (*p.* 155) on ne trouve pour 20 degrés, que 413 toiſes de différence entre la portée obſervée & celle qui auroit dû avoir lieu dans le vide, ſi celle de 15 degrés pouvoit être ſuppoſée avoir été faite auſſi dans le vide; néanmoins la différence entre la portée obſervée & la portée qui auroit eu véritablement lieu dans le vide, eſt beaucoup plus grande. En effet, puiſque la force de la poudre eſt meſurée par $5348^{T}, 85$ au lieu de 1675, il eſt facile de conclure de la formule $2h$, ſin. $2a$, que ſous 20 degrés dans le vide, la portée auroit été de 6876 toiſes. Or elle n'a été dans l'air que de 1740; donc la réſiſtance de l'air a diminué la portée des trois quarts de ce qu'elle devoit être.

528. Voyons maintenant ce que la théorie donnera pour la portée ſous 4 degrés, & pour celle ſous 20 degrés.

Reprenons l'équation $y = x\left(\text{tang. } I + \frac{k^2}{4aph\,\text{col.}^2 I}\right) + \frac{k^4}{8a^2p^2h\,\text{col.}^2 I}\left(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}}\right)$ pour avoir la portée il faut ſuppoſer $y = 0$, & conclure la valeur de x, de cette équation..... $x\left(\text{tang. } I + \frac{k^2}{4aph\,\text{col.}^2 I}\right) + \frac{k^4}{8a^2p^2h\,\text{col.}^2 I}\left(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}}\right) = 0$.

Or cette équation ne pouvant être réſolue directement, il faut ſucceſſivement ſubſtituer à x différens nombres, juſqu'à ce qu'on en trouve un qui ſatisfaſſe à l'équation.

La petiteſſe de l'angle de 4 degrés permet de ſuppoſer $a = 1$. Ainſi l'équation à réſoudre, eſt.....

$$o = x\left(\text{tang. } 4^d + \frac{k^2}{4ph\,\text{cof.}^2 4^d}\right) + \frac{k^4}{8p^2h\,\text{cof.}^2 4^d}\left(1 - e^{\frac{2px}{k^2}}\right).$$

Or nous avons trouvé ci-deſſus la valeur de $\frac{k^2}{p}$ & celle de h; les Tables donnent celle de tang. 4^d & cof. 4^d; ſuppoſant donc d'abord $x = 820$, & ſubſtituant, on trouvera un réſultat poſitif de 5 toiſes; ce qui annonce qu'à la diſtance de 820 toiſes l'ordonnée eſt de 5 toiſes au-deſſus de l'horizontale: l'amplitude eſt donc de plus de 820 toiſes.

Si au lieu de 820 toiſes, on ſubſtitue ſucceſſivement 840 & 860, on trouve des réſultats poſitifs qui vont en diminuant; & enfin en ſubſtituant 862, on trouve qu'il ſatisfait.

La théorie donne donc pour la portée ſous 4 degrés, 862 toiſes; & l'expérience donne 820; l'erreur n'eſt donc que d'environ $\frac{1}{20}$. de la portée.

Dans le vide, la portée auroit dû être de 1489 toiſes.

Pour 20 degrés, on trouvera $a = 1{,}02165$, & log. $a = 0{,}0093021$. Prenant dans les Tables la valeur de tang. 20 degrés, & celle de cof. 20 degrés, & employant la valeur de $\frac{k^2}{p}$ & celle de h trouvées ci-deſſus, & les ſubſtituant dans l'équation $o = x\left(\text{tang. } I + \frac{k^2}{4aph\,\text{cof.}^2 I}\right) + \frac{k^4}{8a^2p^2h\,\text{cof.}^2 I}$ $\left(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}}\right)$, on trouvera qu'en ſubſtituant pour x la portée

obſervée 1740, on a un réſultat poſitif d'environ 85 toiſes. Si on ſubſtitue ſucceſſivement 1780, 1800, 1820 & 1840, ce n'eſt qu'à ce dernier qu'on arrivera à zéro. La théorie donne donc 1840 toiſes pour la portée ſous 20 degrés; la différence avec l'expérience eſt donc d'environ $\frac{1}{17}^e$ de la portée.

Dans le vide la portée, au lieu de 1840, auroit dû être de 6876. Ainſi on voit combien cette théorie rapproche de l'expérience, quoique (517) elle n'ait point ici toute la rigueur dont elle eſt ſuſceptible; il eſt vrai que les portées calculées ſont plus fortes qu'elles ne paroitroient (517) devoir être; mais nous en verrons dans peu une raiſon ſatisfaiſante.

529. Si on fait des calculs ſemblables pour les angles de 25, 30, 35, 40, 45 degrés; on trouvera ſucceſſivement $a = 1{,}03514$; $a = 1{,}05378$; $a = 1{,}075958$; $a = 1{,}10730$; $a = 1{,}14777$; d'où après des ſubſtitutions ſemblables, on conclura les portées telles qu'on les voit dans la Table ci-après.

Au reſte, comme la valeur de a peut devenir pénible à calculer par la ſérie donnée (519) lorſque l'angle I eſt un peu grand, on l'aura plus facilement par cette formule, $a = \frac{1}{2 \text{ cof. } I} + \frac{1}{2} \text{ cot. } I \log. \frac{1}{\text{tang. } (45^d - \frac{1}{2} I)}$, ou $a = \frac{1}{2} \text{ ſec. } I + \frac{1}{2} \text{ cot. } I \log. \text{ tang. } (45^d + \frac{1}{2} I)$. Ce logarithme eſt hyperbolique.

Cette formule ſe déduit de $C = \frac{k^2}{4 p h \text{ cof.}^2 I} + a \text{ tang. } I$ trouvé (519), & de $C = \frac{k^2}{4 p h \text{ cof.}^2 I} + \frac{\text{tang. } \frac{1}{2} I + \text{tang.}^1 \frac{1}{2} I}{1 - \text{tang.}^2 \frac{1}{2} I} + \frac{1}{2} \log. \frac{1 + \text{tang. } \frac{1}{2} I}{1 - \text{tang } \frac{1}{2} I}$ trouvé (505).

530. Enfin pour nouvelle comparaiſon de cette théorie avec

l'expérience, nous nous propoſerons de déterminer la portée de *but en blanc*.

La détermination que nous en avons faite (483) eſt très-éloignée de ce que donne l'expérience, & on en voit actuellement la raiſon. La force de poudre que cette première détermination ſuppoſe, eſt conclue de la ſuppoſition que tout ſe paſſe dans le vide; elle eſt donc beaucoup moindre que la force réelle de la poudre; elle doit donc donner une portée de *but en blanc* beaucoup moindre.

Mais ſi nous déterminons cette portée d'après notre théorie, nous nous rapprocherons beaucoup plus de l'expérience. Nous allons la déterminer pour la pièce de 24 chargée à 9 livres de poudre.

L'angle de la ligne de mire avec l'axe de la pièce pour une pièce de 24, eſt de 1 degré 11 minutes.

Ainſi on peut regarder a comme égal à l'unité, ainſi que cof. I. Nous ſuppoſerons auſſi que la diſtance BL (*fig.* 44) à laquelle la courbe rencontre pour la première fois la ligne de mire, eſt fort petite en comparaiſon de la portée de *but en blanc*; ce qui eſt en effet.

Cela poſé, on a donc $I = 1^d\ 11'$; & l'équation qui déterminera la portée x, ſera . . . . . ,

$$\varrho = x\left(\text{tang. } 1^d\ 11' + \frac{k^2}{4ph}\right) + \frac{k^4}{8p^2h}\left(1 - e^{\frac{2px}{k^2}}\right).$$

Si on ſubſtitue d'abord 300 toiſes pour x, on trouve un réſultat poſitif d'environ 1 toiſe; ce qui annonce que la portée de *but en blanc* doit être un peu plus forte que de 300 toiſes; mais ſi on ſubſtitue 320 toiſes, on trouvera un réſultat négatif de $-0^T,4$; d'où l'on doit conclure que la portée de *but en blanc* eſt entre 300 & 320 toiſes. Si on ſubſtitue 314 toiſes, on trouve que ce nombre ſatisfait à l'équation auſſi exactement qu'on peut le deſirer. Or l'expérience donne en effet environ

300 toiſes pour la portée de *but en blanc* d'une pièce de 24 chargée à 9 livres de poudre.

531. Réſumant tout ce qui précède, on aura les réſultats compris dans la Table ſuivante.

Table des Portées obſervées & des Portées calculées, pour une pièce de 24, chargée à 9 livres de poudre, en employant la portée obſervée ſous 15 degrés, pour meſurer la force de la poudre, d'après la théorie de la réſiſtance.

Selon l'Experience.			Selon la Theorie, & d'après une 1.ere approximation ſeulement.	Selon la Parabole dans le vide.
Inclin.		Portées.	Portées.	Portées.
deg.	min.	toiſes.	toiſes.	toiſes.
4.	0	820.	861.	1489.
15.	0	1675.	1675.	5349.
20.	0	1740.	1840.	6876.
25.	0	1825.	1956.	8191.
30.	0	1910.	2011.	9265.
35	0	2020.	2038.	10053.
40.	0	2050.	2035.	10526.
45.	0	2200.	1992.	10698.
Portée *de but en blanc.*				
1.	11	300.	314.	442.

532. Cette Table fait ſuffiſamment connoître la différence prodigieuſe entre les portées réelles, & celles qui auroient lieu ſans la réſiſtance.

533. Quant aux portées calculées, comparées aux portées réelles, on remarquera que le calcul s'accorde avec l'expérience autant qu'on peut le deſirer, d'après une première approximation. En effet, 1°. on ſait qu'il n'eſt pas rare de voir ſous le même degré, les portées différer de 40 & de 50 toiſes & plus, ſur-tout quand les portées ſon très-grandes, comme elles le ſont ici.

534. 2°. On voit par cette Table, que les portées juſqu'à 40 degrés excluſivement, ſont toutes plus grandes que ſelon l'expérience. Mais quoique les portées calculées d'après cette première approximation ne doivent pas être rigoureuſement les mêmes que les portées obſervées, elles ne peuvent néanmoins en différer autant qu'on le voit ici; cette différence qui eſt toujours en excès juſque vers 40 degrés, annonce évidemment que la portée ſous 15 degrés, ſuppoſée de 1675 toiſes, eſt trop forte, du moins en ſuppoſant la denſité conſtante.

En effet ſous 15 degrés la différence entre la portée que donneroit l'équation de la courbe intégrée rigoureuſement, & cette équation intégrée par notre méthode, eſt abſolument inſenſible; & l'on ſera d'autant plus porté à ſuppoſer qu'on doit faire quelque diminution aux 1675 toiſes; 1°. que la différence des portées obſervées de 15 à 20 degrés comparée à la différence des portées de 20 à 25 degrés eſt plus petite qu'elle ne paroîtroit devoir être. 2°. Qu'il ne faut qu'une aſſez petite diminution dans cette portée pour rapprocher conſidérablement de l'expérience, les portées qui

pèchent par excès, mais nous ne nous arrêterons pas à mettre un plus grand accord entre le calcul & l'expérience; parce que pour un accord plus parfait à l'égard des portées au-deſſus de 26 à 30 degrés, il faudroit avoir égard au changement de denſité. Nous ne nous occuperons de cet objet qu'à la fin de ce volume.

535. Quoique la force que nous avons calculée pour la poudre, d'après la portée obſervée ſous 15 degrés, tende à augmenter les portées, on voit néanmoins qu'à 45 degrés, la portée réelle eſt plus forte que la portée calculée, & qu'en approchant de 45 degrés depuis environ 30 degrés, les portées calculées ſurpaſſent de moins en moins les portées obſervées.

536. L'explication de ces faits ſe trouve naturellement dans la diminution de denſité à meſure que le boulet s'élève. Il ſe fait donc une compenſation de plus en plus exacte entre l'erreur réſultante de la meſure que nous avons trouvée pour la force de la poudre, & l'erreur réſultante de la ſuppoſition d'une denſité conſtante; il ſe fait, dis-je, une compenſation de plus en plus exacte, depuis 30 degrés juſqu'à environ 42 degrés. Paſſé ce terme, l'erreur réſultante de la ſuppoſition d'une denſité conſtante, devient plus forte que celle qui réſulte de la meſure de la force de la poudre.

537. Au reſte, quelque ſuppoſition que l'on puiſſe faire ſur la diminution de la denſité à différentes hauteurs, il paroît bien difficile de ne pas ſoupçonner d'erreur, la portée ſous 45^{d}.

En effet on peut remarquer ſur ces portées obſervées, que leurs différences conſécutives ſont, à compter de 25 degrés, comme il ſuit,

81^{t}, 110^{t}, 30^{t}, 150.

C'eſt-à-dire, qu'elles ſont croiſſantes & poſitives juſque vers 35 degrés ; décroiſſantes mais poſitives, de 35 à 40 degrés ; puis croiſſantes & encore poſitives, de 40 à 45 degrés.

Il paroîtroit cependant qu'en ſuppoſant, comme l'expérience le prouve, que la portée à 45 degrés eſt plus forte qu'à 40 degrés, du moins la différence devroit être plus petite que de 40 à 35 degrés ; car c'eſt une loi générale que lorſqu'une quantité approche du *maximum*, les degrés par leſquels elle augmente, vont en diminuant. Il y a donc bien lieu de croire que la portée ſous 45 degrés, eſt beaucoup plus forte qu'elle n'auroit dû être, relativement aux autres, s'il n'y eût eu d'autre cauſe que le changement d'inclinaiſon. Il eſt bien vrai qu'eu égard au changement de denſité, l'excès de la portée de 45 degrés ſur celle de 40 degrés, doit être plus grand que dans l'hypothèſe d'une denſité conſtante, mais il ne paroît pas qu'il puiſſe ſurpaſſer l'excès de la portée de 40 degrés ſur celle de 35 degrés.

538. Le changement de denſité expliqueroit peut-être mieux, pourquoi la plus grande portée qui, ſelon cette première approximation, ſe trouve fort près de 40 degrés, eſt néanmoins au-deſſus ſelon l'expérience ; en ſorte que l'angle de la portée dans l'air, s'il n'eſt à 45 degrés, ſemble, d'après ces épreuves, être du moins entre 40 & 45 degrés. Dans l'hypothèſe d'une denſité conſtante, & qui ſeroit $\frac{1}{850}$ de celle de l'eau, l'angle de la plus grande portée ſeroit encore plus petit que ne le donne notre théorie. Mais la denſité variable peut rapprocher cet angle de 45 degrés ; & quoique la portée obſervée ſous 45 degrés ſoit la plus grande de toutes celles que préſente notre Table, néanmoins on ne peut guère douter que des épreuves faites avec ſoin vers 35, 40 & 45 degrés,

ne fiſſent trouver la plus grande portée ſenſiblement au-deſſous de 45 degrés.

539. Faiſons préſentement une eſtimation approchée de la denſité de l'air dans la partie ſupérieure de la courbe.

Reprenons, dans cette vue, l'équation.....

$$y = x\left(\text{tang. } I + \frac{k^2}{4pah\,\text{cos.}^2 I}\right) + \frac{k^4}{8p^2a^2h\,\text{cos.}^2 I}\left(-e^{\frac{2apx}{k^2}}\right).$$

Pour avoir la plus grande ordonnée, il faut (36) différencier la valeur de y, & ſuppoſer cette différencielle égale à zéro. Nous aurons donc.....

$$o = dx\left(\text{tang. } I + \frac{k^2}{4aph\,\text{cos.}^2 I}\right) - \frac{k^2\,dx}{4aph\,\text{cos.}^2 I}\,e^{\frac{2apx}{k^2}};$$

d'où l'on tire $e^{\frac{2apx}{k^2}} = \dfrac{\text{tang. } I + \dfrac{k^2}{4aph\,\text{cos.}^2 I}}{\dfrac{k^2}{4aph\,\text{cos.}^2 I}} =$

$\dfrac{b}{\dfrac{k^2}{4aph\,\text{cos.}^2 I}} = \dfrac{4aphb\,\text{cos.}^2 I}{k^2}$, en faiſant tang. $I + \dfrac{k^2}{4aph\,\text{cos.}^2 I} = b$. Donc $\dfrac{2apx}{k^2}$ log. e, ou ſimplement $\dfrac{apx}{2k^2} = \text{log.}\dfrac{4aphb\,\text{cos.}^2 I}{k^2}$, & $x = \dfrac{k^2}{2ap}\,\text{log.}\dfrac{4aphb\,\text{cos.}^2 I}{k^2}$

Subſtituant dans la valeur de y, on aura.....

$$y = \frac{bk^2}{2ap}\,\text{log.}\frac{4aphb\,\text{cos.}^2 I}{k^2} + \frac{k^4}{8p^2a^2h\,\text{cos.}^2 I}\left(1 - \frac{4aphb\,\text{cos.}^2 I}{k^2}\right).$$

540. Comme nous avons déterminé ci-deſſus, les valeurs de $\dfrac{k^2}{p}$, a, h, &c. Il eſt donc facile préſentement de calculer les plus grandes hauteurs y, auxquelles le projectile a dû

s'élever dans les projections rapportées dans la Table ci-deſſus (*p.* 185). C'eſt ainſi que nous les avons calculées pour former la Table ci-après.

541. D'après ce calcul, & ce que nous avons dit (341), il eſt facile de déterminer la denſité de l'air dans lequel le projectile s'eſt trouvé lorſqu'il a paſſé au point le plus élevé de ſa courbe. Appliquant donc ces nombres à la formule donnée (341), on trouvera les réſultats compris dans la Table ſuivante.

TABLE *des plus grandes hauteurs auxquelles a dû s'élever le boulet dans les épreuves rapportées* page 185; *& de la denſité de l'air à ces hauteurs.*

ANGLES de PROJECTION.	PLUS GRANDES HAUTEURS.	DENSITÉS DE L'AIR à ces hauteurs, la denſité au point de projection étant 1.
degrés.	toiſes.	
4	19,5	0,99 $\frac{1}{2}$.
15	173,5	0,97 $\frac{1}{2}$.
20	269,9	0,94 $\frac{1}{2}$.
25	376,8	0,92.
30	492	0,90.
35	614	0,87 $\frac{1}{2}$.
40	741,6	0,85.
45	869,5	0,82 $\frac{1}{2}$.

542. Diſons un mot de l'expreſſion du temps.

Nous avons trouvé ci-deſſus (504) l'équation $\frac{\zeta+\zeta^3}{(1-\zeta\zeta)^2} + \frac{1}{2}\log.\left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\right) = C - \frac{k^2 dt^2}{2dx^2}$, qui en réduiſant en ſérie comme on l'a fait (509 & *ſuiv.*) devient $k^2 dt^2 = 2dx^2\left(C - \frac{2a\zeta}{1-\zeta\zeta}\right)$.

Et comme nous avons trouvé $C - \frac{2a\zeta}{1-\zeta\zeta} = \frac{k^2}{4phcos.^2 I}\,\frac{2epx}{k^2}$; nous aurons donc $k^2 dt^2 =$

$\frac{2k^2dx^2}{4ph\cos.^2 I}e^{\frac{2apx}{k^2}}$, ou $dt = \frac{dx\,e^{\frac{apx}{k^2}}}{\cos. I\sqrt{(2ph)}}$; & par conſéquent $t = \frac{k^2}{ap\cos. I\sqrt{(2ph)}}(e^{\frac{apx}{k^2}} - 1)$. En ajoutant une conſtante telle que $t = 0$, lorſque $x = 0$.

Si la quantité $\frac{apx}{k^2}$ eſt fort petite, on pourra prendre pour valeur de $\frac{apx}{k^2}$ ſa valeur approchée $1 + \frac{apx}{k^2} + \frac{a^2p^2x^2}{2k^4} + \frac{a^3p^3x^3}{6k^6}$ &c. & alors le temps t ſera exprimé par . . . . . $t = \frac{1}{\cos. I\sqrt{(2ph)}}(x + \frac{apx^2}{2k^2} + \frac{a^2p^2x^3}{6k_4}$ &c.)

543. Donc 1°. ſi $\frac{p}{k^2}$ ou la réſiſtance, eſt abſolument nulle, on aura $t = \frac{x}{\cos. I\sqrt{(2ph)}}$; ce qui s'accorde parfaitement avec ce que nous avons démontré (486).

2°. Si $\frac{p}{k^2}$ n'eſt pas $= 0$; mais que cependant $\frac{apx^2}{2k^2}$ ſoit fort petit à l'égard de x; alors on aura, à très-peu-près, $t = \frac{x}{\cos. I\sqrt{(2ph)}} \times (1 + \frac{apx}{2k^2})$; d'où l'on voit que le temps ſera à très-peu-près proportionnel à l'eſpace décrit.

544. Appliquons

544. Appliquons cela aux épreuves faites à Strasbourg le 18 Août 1766.

On a placé sur la chaussée du Fort-Louis, une pièce de 12 de campagne, de manière que l'axe de cette piece dirigé suivant l'horizontale AH (*fig.* 53) étoit élevé de 14 pieds 4 pouces au-dessus du niveau de la prairie; c'est-à-dire, que la chute DC du boulet étoit de 14 pieds 4 pouces; & l'on a observé que la portée moyenne BC (la pièce étant chargée à 4 livres de poudre) étoit de 176 toises $\frac{1}{2}$.

On a porté ensuite la même pièce en un autre point A' élevé au-dessus du niveau de la prairie, de $3^{pi.}\ 9^{po.}$ seulement; & à la même charge, on a trouvé la portée moyenne $B'C'$ de 95 toises.

Cela posé, comme les hauteurs d'où le boulet est tombé dans ces deux cas, sont fort petites, la résistance n'a pu altérer sensiblement la vîtesse verticale, & par conséquent les durées de ces chutes, ou les durées des portées, ont dû être comme les racines quatrées des hauteurs, c'est-à-dire :: $\sqrt{(14{,}33333)} : \sqrt{(3{,}75)}$ :: 1,95 : 1. Or comme le rapport des portées est celui de 176,5 : 95, ou de 1,86 :: 1; le rapport des temps, selon l'expérience, diffère donc peu, en effet, de celui des portées. Voyons ce que dit la théorie.

Le rapport des temps, selon la théorie, doit être celui de $176\frac{1}{2}\left(1+\frac{p}{2k^2}\times 176\frac{1}{2}\right) : 95\left(1+\frac{p}{2k^2}\times 95\right)$, si $\frac{176\frac{1}{2}p}{2k^2}$ est une petite fraction. Or par un calcul semblable à celui que nous avons fait (514), on trouvera que pour un boulet de 4, dont le diamètre est de $4^{po.},321$,

ou $0^{tol.},060013$, on a $\frac{p}{k^2} = 0,0010333$; donc.....

$\frac{p \times 176\frac{1}{2}}{2k^2} = 0,0911$, & $\frac{p \times 95}{2k^2} = 0,0489$. Le rapport des temps eſt donc celui de $176\frac{1}{2} \times 1,0912 : 95 \times 1,0489$ qui eſt le même que le rapport de $1,94 : 1$, lequel diſtère peu de celui des portées, & approche beaucoup, en même-temps de celui des racines quarrées des hauteurs, ainſi que cela doit être.

545. On voit donc que l'on ſe tromperoit beaucoup, ſi on concluoit de ces épreuves, que la réſiſtance de l'air n'altère pas ſenſiblement le mouvement des projectiles. Il eſt bien vrai que le rapport des temps ſe trouve ici le même, à très-peu près, que dans le vide; mais la théorie de la réſiſtance fait voir que pour ce cas, il doit en effet, être à très-peu près le même. On ne peut donc en conclure que le milieu ne réſiſte pas ſenſiblement.

546. Veut-on ſavoir combien l'air a dû réſiſter? Il n'y a (520) qu'à prendre l'équation.....

$$y = x\left(\text{tang. } I + \frac{k^2}{4apk \text{ cos.}^2 I}\right) + \frac{k^4}{8a^2p^2k \text{ cos.}^2 I}\left(1 - e^{\frac{2apx}{k^2}}\right);$$

y ſubſtituer $-14^{pi.},3333$ ou $-2^{T.},3888$ pour y; $176^{T.},5$ pour x; zéro pour tang. I; 1 pour cos. I; & 1 pour a; calculer la valeur de k, en mettant auſſi pour $\frac{k^2}{p}$ ſa valeur qui réſulte du calcul ci-deſſus (544). Nous trouverons $k = 3646$ toiſes; ce qui (176) ſuppoſe une vîteſſe de projection de 192 toiſes ou de 1152 pieds par ſeconde. Or l'effet inſtantané de la réſiſtance

qui a pour expreſſion $\frac{nDsu^2\,dt}{M}$, ou $\frac{p}{k^2}u^2\,dt$, puiſque (501) nous avons fait $\frac{nDs}{M} = \frac{p}{k^2}$, ſera donc..... 0,0010333 $u^2\,dt$; ou en mettant pour u ſa valeur 192 toiſes (puiſque les quantités qui entrent dans $\frac{p}{k^2}$, ont été exprimées en toiſes), l'effet inſtantané de la réſiſtance ſera exprimé par 0,0010333 × $(192)^2$ × dt, ou par 38,1 dt.

Mais l'effet inſtantané de la peſanteur eſt $30^{P.},2\,dt$ ou $5^{T.},03\,dt$; donc l'effet inſtantané, ou initial de la réſiſtance eſt à l'effet inſtantané de la peſanteur : : 38,1 : 5,03, ou : : 7,6 : 1, ou : : $7\frac{1}{5}$: 1; c'eſt-à-dire, que l'effet de la réſiſtance, au premier inſtant, étoit 7 fois & $\frac{1}{5}$ celui du poids du boulet.

547. Comme la chute du boulet a été de $14^{pl.}\ 4^{p.o.}$ ou de $2^{T.},3888$; ce qui ſuppoſe à très-peu près une ſeconde de temps; en ſuppoſant que la réſiſtance eût perſévéré la même pendant la durée très-courte de la portée, elle auroit donc dû faire perdre au boulet, ſur l'eſpace 193 toiſes qu'il devoit décrire dans cet intervalle de temps ſans la réſiſtance, la quantité de $2^{T.},3888$ × $7\frac{1}{5}$ ou à très-peu près 18 toiſes. Or la portée a été de 176 toiſes $\frac{1}{2}$, dont la différence avec les 192 toiſes qui auroient dû être décrites ſans la réſiſtance, eſt 15 toiſes $\frac{1}{2}$; ce qui s'accorde parfaitement, puiſqu'en effet la réſiſtance a dû pendant la durée de la première ſeconde, diminuer (quoique fort peu) de ce qu'elle étoit au commencement.

548. Si on veut appliquer l'expreſſion du temps, trouvée

ci-deſſus (542), ſavoir $t = \frac{k^2 \left(e^{\frac{apx}{k^2}} - 1\right)}{ap \cos. I \sqrt{(2ph)}}$ aux portées compriſes dans la Table donnée (*p.* 185), & les comparer aux durées des portées qui auroient eu lieu dans le vide avec la même force de poudre, on les trouvera telles que la Table ſuivante les repréſente.

TABLE des durées des portées dans l'air & dans le vide, la force de la poudre étant celle qui a été déterminée (525) d'après l'épreuve ſous 15 degrés pour une pièce de 24, chargée à 9^lt de poudre.

INCLINAISON.		DURÉE DES PORTÉES dans l'air.	DURÉE DES PORTÉES dans le vide.
degr.	min.	ſecondes.	ſecondes.
4.	0.....	..... 5 $\frac{2}{5}$.....	..... 6 $\frac{2}{5}$.
15.	0.....	.....16 $\frac{1}{5}$.....	.....23 $\frac{9}{10}$.
20.	0.....	.....20.....	.....31 $\frac{1}{2}$.
25.	0.....	.....23 $\frac{9}{10}$.....	.....39.
30.	0.....	.....27.....	.....46 $\frac{1}{10}$.
35.	0.....	.....29 $\frac{7}{10}$.....	.....52 $\frac{9}{10}$.
40.	0.....	.....33 $\frac{1}{5}$.....	.....59 $\frac{1}{4}$.
45.	0.....	.....35 $\frac{1}{4}$.....	.....65 $\frac{1}{5}$.
PORTÉE *de but en blanc.*			
1.	11.....	..... 1 $\frac{9}{17}$.....	..... 1 $\frac{9}{10}$.

549. Dans tout ce qui précède, nous avons ſuppoſé que la peſanteur étoit conſtante, & que les directions de ſon action ſur le mobile, en chaque point de la courbe, étoient parallèles. Il n'en eſt pas ainſi à la rigueur; mais les effets qui peuvent réſulter de la variation de la peſanteur & de ſes directions, ſont ſi petits & ſi fort au-deſſous des erreurs inévitables dans la pratique, qu'il ſeroit ſuperflu de s'en occuper.

En effet, 1° la plus grande portée dans les épreuves rapportées (*page* 185) eſt 2200 toiſes; ce qui fait environ une lieue de vingt-cinq au degré, laquelle eſt de 2283 toiſes. Donc cette portée ſoutend au centre de la Terre, un angle de 2′ 29″; donc les directions de la peſanteur au point de projection & au point de chute, font à peine un angle de 2′ 29″.

2°. La plus grande hauteur à laquelle le projectile puiſſe s'élever avec la force de poudre que ſuppoſent ces épreuves (en ſuppoſant la denſité conſtante, eſt de 1400 toiſes au plus, ainſi qu'on peut le conclure de ce qui a été dit (176 & 525). Mais comme la denſité va en diminuant à meſure que le projectile s'élève, ſuppoſons qu'il s'élèveroit verticalement juſqu'à une hauteur moitié plus grande, c'eſt-à-dire, juſqu'à 2100 toiſes, ce qui eſt beaucoup au-deſſus du vraiſemblable; ces 2100 toiſes feront environ une lieue. Or la peſanteur diminuant au-deſſus de la ſurface de la Terre, en raiſon inverſe du quarré de la diſtance; il s'enſuit, puiſque le rayon de la Terre eſt de 1432 lieues, que la peſanteur à la hauteur d'une lieue, ſera à la peſanteur à la ſurface :: $(1432)^2 : (1433)^2$ ou :: 1 : 1,0014; c'eſt-à-dire, qu'à cette hauteur, la peſanteur eſt diminuée d'environ $\frac{1}{700}$; & encore cette diminution n'auroit-elle lieu que dans le cas où le projectile s'élèveroit verticalement, & au moment où il auroit atteint ſa plus grande élévation.

DE L'ÉQUILIBRE ET DU MOUVEMENT DANS LES MACHINES.

550. L'OBJET général des Machines eſt de tranſmettre l'action des forces.

On n'a pas toujours pour but, dans l'uſage des machines, d'augmenter l'action, dont la force motrice ſeroit capable ſi elle agiſſoit immédiatement ſur le mobile; quelquefois il ne s'agit que de tranſmettre cette action ſuivant une direction déterminée : telle eſt, par exemple, la deſtination des poulies fixes. D'autres fois on n'a en vue que d'aſſujettir le mobile à décrire des eſpaces réglés ſur certaines conditions relatives, ſoit au temps, ſoit à d'autres circonſtances quelconques; conditions

qui n'exigent pas toujours que la force motrice augmente en ſe tranſmettant : les machines d'horlogerie en fourniſſent pluſieurs exemples.

551. Le nombre & la nature des machines varient ſelon les objets qu'on a en vue. Mais pour être en état de déterminer leurs effets, il n'eſt pas néceſſaire de les avoir conſidérées toutes. Quelque compoſées, quelque variées qu'elles ſoient, elles ne ſont que des combinaiſons d'un nombre aſſez limité de machines ſimples.

Nous allons d'abord expoſer les propriétés de celles-ci. Nous ferons voir enſuite, par divers exemples, comment ces propriétés doivent être appliquées à l'évaluation des effets des machines compoſées.

Nous réduirons à cinq le nombre des machines ſimples ; ſavoir, *les Cordes*, *le Levier*, *la Poulie*, *le Treuil & le Plan incliné*.

A ne conſidérer ces machines que par rapport à l'équilibre, on pourroit les réduire à deux, & même à une ſeule; ſavoir, au levier. Mais dans le cas du mouvement, la nature de chacune donne lieu à des conſidérations qui lui ſont propres, & qui exigent qu'on en traite ſéparément.

Des Cordes.

552. Nous ſuppoſerons, d'abord, que les cordes ſont des corps parfaitement flexibles; nous verrons ailleurs comment on doit avoir égard à leur défaut de flexibilité parfaite.

Nous conſidérerons auſſi, d'abord, les cordes comme non peſantes; mais peu après nous verrons la manière d'avoir égard à leur peſanteur.

Ces deux ſuppoſitions faites, il eſt facile de voir, que le diamètre plus ou moins grand des cordes, ne fait rien à la communication des forces; on peut toujours, par la penſée, ſubſtituer aux cordes, un fil qui paſſeroit ſuivant l'axe du cylindre qu'elles forment, & ſuppoſer que la force appliquée à la corde, agit par le moyen de ce fil ſeulement.

553. On emploie les cordes pour tranſmettre l'action des forces, ſoit immédiatement, ſoit en appliquant les cordes aux machines. Mais pour juger des effets des puiſſances appliquées aux machines par le moyen des cordes, il faut connoître les effets dont ces puiſſances ſont capables, lorſqu'elles agiſſent par le moyen des cordes ſeulement.

554. Conſidérons donc, d'abord, trois puiſſances P, Q, R (*fig.* 54) agiſſant les unes contre

les autres, par le moyen des cordes AP, AQ, AR unies par le nœud A; & ſuppoſant que l'on connoît les directions AP, AQ, AR, propoſons-nous de déterminer les conditions néceſſaires pour que ces trois forces ſe faſſent équilibre, & les rapports de ces forces.

Il eſt évident 1° qu'elles doivent être toutes trois dans un même plan. Car ſi l'une, par exemple la force P, n'étoit pas dans le plan des deux autres, on pourroit toujours la concevoir décompoſée en deux forces, l'une dans ce plan, l'autre perpendiculaire à ce même plan, & par conſéquent perpendiculaire à chacune des deux forces P & Q; celle-ci n'agiroit donc en aucune manière pour s'oppoſer à ces deux-ci; il n'y auroit donc rien pour la détruire; il n'y auroit donc point équilibre.

2°. Ces trois forces étant dans un même plan, il faut pour qu'elles ſe faſſent équilibre que l'une quelconque d'entr'elles, par exemple la force P, produiſe deux efforts, l'un égal & contraire à la force Q, l'autre égal & contraire à la force R.

Or ſi après avoir prolongé RA & QA, on prend la ligne quelconque AD pour repréſenter la force P, & que ſur AD comme diagonale, on forme le parallélogramme $ACDB$ dont les côtés AB, AC ſoient ſur le prolongement de

QA & de RA, les deux côtés AB, AC, repréſentent (193) deux forces qui agiſſant conjointement ſuivant ces directions, feroient le même effet que la force P. Donc AB, AC ſont les efforts que P oppoſe réellement aux deux forces Q & R; donc pour qu'il y ait équilibre, il faut que Q puiſſe être repréſenté par BA, & que R le ſoit par CA, dans la ſuppoſition que P le ſoit par AD. On doit donc avoir $P : Q :: AD : AB$, & $P : R :: AD : AC$, c'eſt-à-dire, $P : Q : R :: AD : AB : AC$. Tel eſt le rapport que doivent avoir les trois forces P, Q, R pour être en équilibre.

555. Puiſque les deux forces Q & R doivent être égales aux deux forces AB, AC qui ſont les compoſantes de la force P, on peut donc dire que lorſqu'il y a équilibre entre trois forces, deux quelconques doivent avoir le même rapport avec la troiſième, que deux forces compoſantes ont avec leur réſultante.

556. Donc (201) on aura auſſi $P : Q : R :: \text{ſin. } BAC : \text{ſin. } CAD : \text{ſin. } DAB$ ou $:: \text{ſin. } RAQ : \text{ſin. } RAS : \text{ſin. } QAS$, en prolongeant PA vers S; c'eſt-à-dire, que *quand trois forces ſe font équilibre, chacune eſt repréſentée par le ſinus de l'angle compris entre*

les directions des deux autres, prolongées s'il eſt néceſſaire : ou bien encore *de trois forces qui ſe font équilibre, chacune eſt repréſentée par le ſinus de l'angle au travers duquel paſſe ſa direction prolongée.* Car les angles RAP, QAP, ſont ſupplémens des angles RAS, QAS, & par conſéquent ont même ſinus.

557. Quoique, lorſqu'on fait abſtraction du poids des cordes, & qu'on les ſuppoſe parfaitement flexibles, il paroiſſe qu'en général, leur longueur importe peu pour l'effet qu'il s'agit de produire ; il y a cependant beaucoup de rencontres où la conſidération de cette longueur n'eſt point du tout une choſe indifférente.

Par exemple, lorſqu'un Maçon cramponné à la corde nouée ABD, attachée au point A (*fig.* 55) veut s'écarter de la verticale AE pour réparer à droite ou à gauche de cette verticale ; un Manœuvre le tire à l'aide de la corde BC, qui fait prendre à la corde nouée la ſituation ABD ; dans cette ſituation l'effort que doit faire le Manœuvre eſt au poids du Maçon : : ſin. ABD : ſin. ABC (556), ou en prolongeant la verticale BB, : : ſin. ABO : ſin. ABC ; mais ſi la corde nouée, au lieu d'être attachée en A, l'eût été en un point A' plus près de B, la force qu'auroit dû employer le Manœuvre, ſeroit au poids du Maçon : : ſin. $A'BO$: ſin. $A'BC$; or il eſt facile de voir que les angles ABC, $A'BC$ étant obtus, ſin. $A'BC$ eſt plus petit que ſin. ABC ; & comme ſin. ABO eſt plus petit que ſin. $A'BO$; il s'enſuit que le Manœuvre auroit plus d'effort à faire ſi la corde étoit en A' que ſi elle étoit fixée en A.

On voit auſſi par la même raiſon, que le Manœuvre ap-

pliqué à la corde BC aura en général d'autant moins de force à employer, que la corde BC ſera plus longue.

558. Voici un autre cas où la longueur des cordes au lieu de procurer de l'avantage, ſeroit déſavantageuſe; ſuppoſons qu'il s'agit de faire monter une voiture ſur la montagne KI (*fig.* 56), & que le premier des chevaux attelé à cette voiture ſoit actuellement au ſommet I; ſi AC eſt la longueur du trait, & que ſur cette direction on prenne une partie AO pour repréſenter l'effort avec lequel ce cheval tire; il eſt facile de voir que l'effet de la traction ſuivant AO, n'eſt pas totalement employé à tirer la voiture, mais qu'il y en a une partie qui agit ſuivant la direction AB du trait AI prolongé, & une autre partie AH, qui agit perpendiculairement à ce trait; que la force ſuivant AB eſt la ſeule qui ſerve à trainer la voiture; & que la force ſuivant AH eſt nuiſible, en ce qu'elle ne peut que tendre à faire abattre le ſecond cheval; or ſi la longueur du trait au lieu d'être ſeulement AC, étoit plus longue, étoit AG, par exemple; alors CD & GF étant égales chacune à la hauteur du poitrail du cheval, il eſt clair que l'effort de la traction AO' décompoſé comme ci-deſſus, produiroit un moindre effet dans le ſens AB, & un plus grand effort AH' dans le ſens AH; car l'effort ſuivant AO, eſt à l'effort ſuivant AH dans le premier cas : : ſin. BAH : ſin. BAO, ou $AO : AH$: : ſin. BAH : ſin. BAO; mais par la même raiſon $AH' : AO'$ ou AO : : ſin. BAO' : ſin. BAH' ou ſin. BAH; d'où il eſt aiſé de conclure que $AH' : AH$: : ſin. BAO' : ſin. BAO; ainſi l'effort pour faire abattre le ſecond cheval, ſera plus grand à meſure que le trait ſera plus long.

Ainſi quoiqu'il puiſſe y avoir quelque avantage à donner

aux traits une certaine longueur pour permettre aux chevaux de prendre eſſor après les repos pendant la montée, néanmoins il y auroit d'autant plus d'inconvénient à les alonger trop, que les chevaux plus fatigués au ſommet qu'ailleurs, ſont moins en état de réſiſter à l'effort qui tend à les abattre.

559. Puiſque les trois forces P, Q, R (*fig.* 54), qui doivent ſe faire équilibre, ſont repréſentées par AD, AB, AC, ou (ce qui revient au même) par les côtés AD, AB, BD du triangle ABD dont les angles ABD, BDA, DAB ſont égaux aux angles CAQ, RAS, QAS qui déterminent les directions de ces forces, on voit donc que toutes les queſtions qu'on peut propoſer à l'égard des valeurs & des directions des forces qui doivent ſe faire équilibre, ſe réduiſent à la Trigonométrie.

Par exemple, ſi l'on donnoit les valeurs des trois forces P, Q, R, & que l'on demandât comment elles doivent être dirigées pour ſe faire équilibre, on réſoudroit (*Géom.* 308) le triangle DBA dont les trois côtés ſont connus; & les angles que donneroit cette réſolution, détermineroient ceux que doivent former entre elles les directions des puiſſances.

Si l'on donnoit les deux forces P & Q, & l'angle PAQ de leurs directions, ou ſon ſupplément $QAS = DAB$; alors on connoîtroit les deux côtés AD, AB, & l'angle compris DAB; on pourroit donc (*Géom.* 310) calculer DB ou la valeur de la force R, & l'angle DBA dont

l'égal SAR eſt celui que la direction de R doit former avec celle de P.

Si les angles que les trois directions doivent former étoient donnés, on ne pourroit pas (*Géom.* 271) déterminer la valeur abſolue des trois forces, mais ſeulement leur rapport. Dans tous les autres cas, la propoſition que nous venons d'établir (559) donnera toujours ce que l'on cherche, dès qu'il y aura trois choſes connues.

560. Si au lieu d'avoir deux puiſſances Q & R attachées aux deux cordons, ces deux cordons étoient fixement attachés en Q & R ou ſur tout autre point de leurs directions; AB, AC, exprimeroient les efforts que ſupportent ces points fixes.

561. Nous avons ſuppoſé (*fig.* 54) que les trois cordons étoient fixement attachés au nœud A. Mais ſi la puiſſance P (*fig.* 57) étoit appliquée à un cordon dont l'extrémité eût un anneau dans lequel paſſât la corde QAR; alors on ne ſeroit pas maître de donner les directions des trois cordons. En effet, il ne ſuffit pas alors, que l'effort AB ſoit dirigé ſuivant QA & égal à la force Q, & qu'il en ſoit de même de AC à l'égard de R; il faut encore que l'anneau ne puiſſe pas gliſſer; ce qui exige que l'angle QAS ſoit égal à SAR; c'eſt-à-dire, que la puiſſance P doit être dirigée de manière à diviſer l'angle QAR en deux parties égales. Au reſte on a

toujours $P : Q : R : :$ ſin. QAR : ſin. SAR : ſin. QAS; mais comme $SAR = QAS = \frac{1}{2} QAR$, cette ſuite de rapports devient $P : Q : R : :$ ſin. QAR : ſin. $\frac{1}{2} QAR$: ſin. $\frac{1}{2} QAR$, enſorte que les deux puiſſances R & Q ſont égales.

562. Si la corde QAR au lieu d'être tirée par deux puiſſances Q & R, étoit retenue aux deux points fixes Q & R (*fig.* 58), il en ſeroit évidemment de même; c'eſt-à-dire, que pour que l'équilibre eût lieu, il faudroit que la puiſſance P diviſât l'angle QAR en deux parties égales; mais les deux points fixes Q & R étant ſuppoſés capables de toute eſpèce de réſiſtance, la puiſſance P peut avoir d'ailleurs telle valeur que l'on voudra.

563. Si on conçoit que la corde QAR ſoit entraînée autour des deux points fixes Q & R par le mouvement de l'anneau entraîné par la puiſſance P, le point A décrira dans ce mouvement (*Alg.* 225) une ellipſe qui aura pour foyers les points Q & R, & dont le grand axe BC ſera égal à QAR; or nous avons vu (*Alg.* 235) que la perpendiculaire à cette courbe, diviſe l'angle QAR en deux parties égales; on peut donc dire que dans quelque ſituation que ſe trouve la corde QAR, la puiſſance P ſera en équilibre ſi elle tire ſuivant une direction perpendiculaire au point A de l'ellipſe BAC, où ſe réuniſſent les deux parties QA & RA.

564. Si la puiſſance P eſt un poids (*fig.* 59); alors il ne pourra être en équilibre que dans une ſeule ſituation; ce ſera celle où le point A ſe trouvera ſur un point de l'ellipſe dont la tangente ſera horizontale; ainſi pour déterminer la poſition du point où le poids

P

P demeurera en équilibre, il faut tracer l'ellipſe BIC, ce qui eſt facile ; puis ayant mené le diamètre horizontal HS, mener à l'ellipſe une tangente qui ſoit parallèle à ce diamètre, ou qui faſſe avec l'ordonnée AQ un angle égal au complément de HDB, ce qui eſt facile par ce qui a été dit (32).

565. Si la corde RAQ tirée par les deux puiſſances R & Q (*fig.* 60) paſſe par-deſſus un point fixe A, les deux puiſſances R & Q doivent pareillement être égales ; & la preſſion qui en réſulte contre ce point fixe, eſt dirigée ſuivant une ligne qui diviſe l'angle QAR en deux parties égales, & elle eſt à l'égard de l'une des deux puiſſances, comme le ſinus de QAR eſt au ſinus de ſa moitié.

566. Tout ce qui précède étant bien compris, rien n'eſt plus facile que de déterminer les conditions de l'équilibre entre tant de puiſſances que l'on voudra, appliquées à différens cordons unis par un même nœud, ou par différens nœuds.

567. Suppoſons d'abord que chaque nœud n'aſſemble que trois cordons, & que tout eſt dans un même plan, & tel qu'on le voit (*fig.* 61). Voici comment on peut enviſager l'équilibre & en déduire les rapports des forces.

La puiſſance P fait effort contre les deux cordons AT, AB. Prolongeons donc les directions de

ceux-ci, & ayant pris AF pour repréſenter la puiſſance P, formons ſur AF comme diagonale, & ſur les prolongemens AE, AD, comme côtés, le parallélogramme $ADFE$; il faudra que l'effort T que ſupporte le crochet, ſoit exprimé par AE, & la tenſion du cordon BA ſera exprimée par AD: en ſorte qu'en nommant a cette tenſion, on aura $P : T : a :: AF : AE : AD$, ou $P : T : a : :$ ſin. DAE : ſin. FAD : ſin. FAE; ou $P : T : a ::$ ſin. TAB : ſin. PAB : ſin. TAP.

Concevons l'effort AD appliqué en B ſuivant BI égale & en ligne droite avec AD; BI fait effort contre la puiſſance Q & contre le cordon BC; prolongeant donc, comme ci-deſſus, les cordons QB & CB; & formant le parallélogramme $GBHI$, BH ſera la valeur que doit avoir la puiſſance Q, & BG la tenſion du cordon CB. On aura, par la même raiſon, en nommant b cette tenſion, $a : Q : b ::$ ſin. CBH : ſin. IBG : ſin. IBH, ou $a : Q : b ::$ ſin. QBC : ſin. ABC : ſin. ABQ.

Concevons l'effort BG appliqué en C ſuivant CK égale & en ligne droite avec BG; CK fait effort contre S & contre R. Donc ſi on prolonge RC & SC, & que l'on forme comme ci-devant

le parallélogramme $MCLK$, CM exprimera la valeur que doit avoir la force R, & CL celle que doit avoir la force S. On aura, par la même raiſon, $b : R : S :: \text{ſin. } MCL : \text{ſin. } KCL : \text{ſin. } MCK$, ou $b : R : S :: \text{ſin. } RCS : \text{ſin. } BCS : \text{ſin. } BCR$.

Et ſi l'on veut avoir immédiatement le rapport de la tenſion T d'une branche quelconque TA de la corde, à la tenſion d'une autre branche quelconque, de CS par exemple; on la trouvera facilement en cette manière.

Des ſuites de rapports ci-deſſus, ne prenons que ceux qui concernent les tenſions des parties de la corde $TABCS$; nous aurons.

$$T : a :: \text{ſin. } PAB : \text{ſin. } TAP;$$
$$a : b :: \text{ſin. } QBC : \text{ſin. } ABQ;$$
$$b : S :: \text{ſin. } RCS : \text{ſin. } BCR.$$

Leſquelles étant multipliées par ordre, donnent $T : S :: \text{ſin. } PAB \times \text{ſin. } QBC \times \text{ſin. } RCS : \text{ſin. } TAP \times \text{ſin. } ABQ \times \text{ſin. } BCR$. Et ſi l'on vouloit le rapport de la tenſion T à la tenſion b, on ne multiplieroit que les deux premières proportions; & ainſi des autres.

Veut-on avoir le rapport des puiſſances entre-

elles ? Il n'y a qu'à tirer des ſuites de rapports ci-deſſus, le rapport de deux puiſſances conſécutives à la tenſion du cordon intermédiaire ; on aura

$$P : a :: \text{ſin. } TAB : \text{ſin. } TAP :$$
$$a : Q :: \text{ſin. } QBC : \text{ſin. } ABC ;$$
$$Q : b :: \text{ſin. } ABC : \text{ſin. } ABQ ;$$
$$b : R :: \text{ſin. } RCS : \text{ſin. } BCS.$$

Multipliant ces quatre proportions & réduiſant on a $P : R ::$ ſin. $TAB \times$ ſin. $QBC \times$ ſin. $RCS :$ ſin. $TAP \times$ ſin. $ABQ \times$ ſin. BCS. Et ſi l'on vouloit le rapport de P à Q, on ne multiplieroit que les deux premières proportions.

On voit par là, ce qu'il y a à faire pour un plus grand nombre de puiſſances, & pour comparer les tenſions des cordons avec les puiſſances mêmes.

568. Si les puiſſances P, Q, R diviſoient en deux parties égales les angles TAB, ABC, &c. alors les angles TAP, PAB ſeroient égaux, ainſi que les angles ABQ, QBC, &c. d'où & des rapports ci-deſſus on concluroit que toutes les parties de la corde $TABCS$ ſont également tendues.

569. Si au lieu des puiſſances P, Q, R, (*fig.* 61) on avoit en A, B, C (*fig.* 62) des points fixes ; alors (565) la preſſion que la tenſion des parties extrêmes de la corde exerceroit ſur ces points fixes, ſeroit dirigée de manière à diviſer

chaque angle en deux parties égales ; & les tenſions de toutes les parties TA, AB, &c. de la corde $TABCS$ ſeroient égales (568). Donc (*fig.* 63) ſi deux puiſſances T & S tendent une corde appliquée ſur le contour d'un polygone ou d'une courbe quelconque, la tenſion ſe communiquera également par-tout, en ſorte que ces deux puiſſances doivent être égales.

570. Lorſque les cordons aſſemblés par un même nœud, étant dans un même plan, ſe trouvent être au nombre de plus de trois ; ou lorſqu'étant dans des plans différens, ils ſont au nombre de plus de quatre ; alors les directions des cordons étant données, les rapports des puiſſances & des tenſions des cordons ne ſont pas abſolument déterminés ; c'eſt-à-dire, que ſi un certain nombre de puiſſances (qui ne ſoit pas au-deſſous de ce qui vient d'être dit) ſe ſont fait équilibre ſuivant des directions connues, on peut leur ſubſtituer pareil nombre d'autres puiſſances dirigées de la même manière, mais qui ayant entr'elles des rapports tous différens, ne ſe feront pas moins équilibre.

Par exemple, ſi les quatre cordons AP, AQ, AR, AS, (*fig.* 64) ſont tous dirigés dans un même plan, & qu'ayant pris AB pour repréſenter

la force P, & prolongé le cordon SA vers C; on conçoive l'effort AB compoſé de deux autres AC, AD dont le premier ſoit égal & directement oppoſé à la puiſſance S; rien ne détermine la direcion AD de l'action qui doit s'oppoſer à l'effort compoſé des deux puiſſances Q & R; rien, dis-je, ne détermine cette direction, ſinon que prolongée elle doit paſſer dans l'angle QAR; condition à laquelle on voit évidemment qu'il y a une infinité de manières de ſatisfaire. C'eſt pourquoi ſi ayant pris la direction AD arbitrairement avec la condition ſeulement qui vient d'être preſcrite, on forme ſur AB comme diagonale, & ſur les directions AC, AD, comme côtés, le parallélogramme $ACBD$; & qu'enſuite ſur AD, comme diagonale, & ſur les prolongemens AE, AF, des directions des deux puiſſances Q & R, on forme le parallélograme $AEDF$; alors en prenant AB pour repréſenter la valeur de P, on pourra prendre AC pour celle de S, AF pour celle de R, & AE pour celle de Q, parce que la force AB agit comme le feroient les deux forces AC, AD, dont la première pour faire équilibre à S, doit être $= S$; à l'égard de la ſeconde AD, elle agit comme les deux forces AF, AE, qui pour faire équilibre à R & Q, doivent leur être reſpectivement égales.

Mais on voit en même temps, qu'en donnant à AB, une valeur différente, & conſervant la direction de S, Q & R; alors AD, AF & AE auroient de valeurs différentes, telles néanmoins, qu'étant attribuées aux puiſſances ſur les directions deſquelles elles ſe trouvent, ces puiſſances ſe feroient équilibre; ainſi, dans ce cas, les directions reſtant les mêmes, il y a une infinité de manières de mettre ces puiſſances en équilibre.

571. Il en eſt de même lorſque les cordons iſſus d'un même nœud, ſont dans différens plans, & qu'ils ſont au nombre de plus de quatre. Mais lorſqu'il n'y en a que quatre, les directions étant données, les rapports que doivent avoir les forces appliquées à ces cordons, ſont déterminés.

Car, par deux quelconques AP, AS, de ces cordons (*fig.* 65), on peut toujours concevoir un plan qui prolongé ſuffiſamment rencontrera le plan RAQ des deux autres, ſuivant une ligne DAE quelconque, mais dont la poſition eſt déterminée par les directions des quatre puiſſances. Alors ſi l'on prolonge la direction SA, & qu'ayant pris AB pour repréſenter la puiſſance P, on forme ſur AP comme diagonale & ſur les directions AD, AC comme côtés, le parallélogramme $DACB$, on aura AC pour la valeur de la puiſſances S, & AD pour celle de l'effort que la puiſſance P

exerce contre les deux puiſſances Q & R agiſſant conjointement. Donc ſi ayant prolongé QA & RA qui ſont dans un même plan avec AD, on forme ſur AD comme diagonale, & ſur les prolongemens AF & AG comme côtés, le paralléiogramme $AFDG$; AF, AG ſeront les valeurs qu'on doit donner aux deux puiſſances Q & R.

572. Au reſte, dans quelque cas que ce ſoit, ſoit que les cordons ſoient ou ne ſoient pas dans un même plan; comme l'équilibre exige que chaque nœud demeure immobile, ſi l'on décompoſe la force ou la tenſion de chaque cordon appliquée à un même nœud, en trois autres forces perpendiculaires entre elles, ou parallèles à trois droites perpendiculaires entre elles, il faut (283) pour chaque nœud, que la ſomme des forces parallèles à chacune de ces lignes ſoit zéro (bien entendu que par le mot *ſomme*, on entend ici la ſomme des forces qui agiſſent dans un ſens, moins la ſomme de celles qui agiſſent dans l'autre). Si les cordons aſſemblés par un même nœud, étoient dans un même plan, il ſuffiroit de décompoſer en deux forces parallèles à deux lignes perpendiculaires entre elles, & tirées dans ce même plan. Par ce principe, on aura toujours toutes les conditions de l'équilibre, les cordons étant fixement liés entre eux.

573. Pour en donner un exemple ſimple, propoſons-nous de trouver par ce même principe, le rapport de trois puiſſances en équilibre par le moyen de trois cordons aſſemblés par un même nœud (*fig.* 66).

Suppoſons, pour un moment, que AG, AB, AF, ſont les lignes qui peuvent repréſenter ces trois puiſſances; & pour avoir moins de décompoſition à faire, décompoſons les deux puiſſances Q & R, comme on le voit dans la figure, c'eſt-à-dire, chacune en deux; l'une ſur la direction de P; l'autre, perpendiculaire à cette même direction. Alors dans les triangles rectangles BAC, FAI, en repréſentant le rayon par 1, nous aurons $BC = AD = AB$ ſin. QAC; $FI = AE = AF$ ſin. RAC; $AC = AB$ cof. QAC; $AI = AF$ cof. FAI. Donc ſuivant le principe que nous venons de poſer, nous aurons AB ſin. $QAC - AF$ ſin. $RAC = 0$, & AB cof. $QAC + AF$ cof. RAC. $- AG = 0$. La première de ces équations donne AB ſin. $QAC = AF$ ſin. RAC; & par conſéquent $AB : AF ::$ ſin. $RAC :$ ſin. QAC, c'eſt-à-dire, $Q : R ::$ ſin. $RAC :$ ſin. QAC, ce qui s'accorde parfaitement avec ce qui a été démontré (556).

Si de la première équation on tire la valeur de AF, & qu'on la ſubſtitue dans la ſeconde, on

aura AB cos. $QAC + \frac{AB \text{ cos. } RAC \text{ sin. } QAC}{\text{sin. } RAC} - AG = 0$, ou AB cos. QAC sin. $RAC + AB$ cos. RAC sin. $QAC = AG$ sin. RAC. Mais (*Géom.* 286) cos. QAC sin. $RAC +$ cos. RAC sin. $QAC =$ sin. $(QAC + RAC) =$ sin. QAR; donc AB sin. $QAR = AG$ sin. RAC; c'eſt-à-dire, $AB : AG ::$ sin. $RAC :$ sin. QAR, ou $Q\,P ::$ sin. $RAC :$ sin. QAR; ce qui s'accorde également avec ce qui a été démontré (556).

574. Voyons maintenant ce que la peſanteur des cordes peut changer à la communication de l'action des puiſſances.

Soient (*fig.* 67) tant de puiſſances que l'on voudra, appliquées à une même corde, ſans peſanteur $TABCS$, tirée à ſes deux extrémités par deux puiſſances T & S, ou retenue à deux points fixes T & S.

Si l'on prolonge les deux cordons extrêmes TA, SC juſqu'à ce qu'ils ſe rencontrent en V, il eſt évident que l'effort réſultant des tenſions particulières de ces deux cordons extrêmes, doit paſſer par ce point V. Et puiſque nous ſuppoſons qu'il y a équilibre, la réſultante des trois puiſſances P, Q & R, & des tenſions des deux cordons

intermédiaires *AB* & *BC*, doit auſſi paſſer par le point *V*, puiſque pour l'équilibre elle doit être égale & directement oppoſée à la réſultante des tenſions des deux cordons *TA* & *CS*. Mais la réſultante des trois puiſſances & des tenſions des deux cordons intermédiaires, n'eſt autre que celle des trois puiſſances ſeulement, parce que chacun des deux cordons *AB* & *BC* n'a, par lui-même, aucune action, & par conſéquent aucun effet contre quelque partie que ce ſoit du ſyſtème. Donc la réſultante de toutes les puiſſances *P*, *Q*, *R* appliquées à la corde, paſſe par le prolongement *V* des deux cordons extrêmes.

575. On a vu (197 *& ſuiv.*) comment on peut déterminer cette réſultante ; mais ſi les cordons ſont parallèles, comme il arrive lorſque les puiſſances *P*, *Q*, *R* ſont des poids ; comme leur réſultante ne peut manquer de leur être parallèle, ſa direction ſe détermine tout ſimplement, en menant par le point *V*, une parallèle à l'une des directions de ces poids, c'eſt-à-dire, une verticale.

576. Soient donc (*fig.* 68) tant de poids qu'on voudra, appliqués à une même corde ſans peſanteur ; ayant prolongé les deux cordons extrêmes, & mené par leur rencontre *V* la verticale *VX*, on peut réduire, par la penſée, l'équilibre de tout ce ſyſtème, à celui de trois puiſſances appliquées à

trois cordons assemblés par le nœud *V*, & où la puissance dirigée suivant *XVZ* est la somme des poids. De-là & de ce qui a été dit (556) on conclura donc que la tension *T* est à la tension *S*, comme le sinus de *XVS* est au sinus de *TVX*.

577. Si l'on se représente, maintenant, une corde pesante, comme l'assemblage d'une infinité de petits poids uniformément distribués sur l'axe de cette corde, on voit donc que si *S* (*fig* 69) représente le point où la puissance est appliquée à la corde, & *T* celui où cette corde est appliquée à une machine, l'action que la puissance exerce sur le point *T*, se transmet suivant la tangente *TV* à la courbe que forme la corde par sa pesanteur; que cette action n'est égale à celle de la puissance *S*, que lorsque la verticale menée par le point de concours *V* des deux tangentes extrêmes, divise l'angle *TVS* en deux parties égales; & qu'en général l'action de la puissance *S*, celle qu'elle transmettroit si la corde n'étoit pas pesante, est à celle qu'elle transmet conjointement avec le poids de la corde, comme le sinus de *TVX*, est au sinus de *SVX*.

578. Remarquons que, rigoureusement parlant, quelque force que l'on emploie pour tendre une corde, elle ne peut jamais être parfaitement droite, si ce n'est dans la situation verticale.

En effet, ſuppoſons que la corde RAP (*fig.* 70) ſans peſanteur, ſoutient le poids Q, à l'aide des deux puiſſances égales P & R dont les directions forment un angle infiniment approchant de 180^d. On aura $Q : P :: \text{ſin. } CAD : \text{ſin. } CAB$ (556), ou (en prolongeant DA) :: ſin. CAS : ſin $\frac{1}{2}$ CAD; mais l'angle CAS eſt infiniment petit, par la ſuppoſition; & $\frac{1}{2}$ CAD approche infiniment d'un angle droit; donc Q doit être infiniment petit par rapport à P; donc lors même que le poids Q eſt infiniment petit, les deux parties de la corde forment encore un angle.

On peut donc conclure de-là, qu'une force très-petite Q, excite une tenſion très-grande dans les cordons AP, AR, lorſque l'angle RAP de ceux-ci eſt fort obtus.

579. Par-là on peut expliquer pourquoi en ſoufflant par le moyen du tuyau Aa (*fig.* 71) dans une enveloppe flexible $aEBCa$ à l'extrémité B de laquelle eſt attaché le poids P, un ſouffle médiocre ſuffit pour élever ce poids P quoiqu'aſſez conſidérable.

En effet, on peut regarder chaque moitié aCB, aEB de la ſection verticale de cette enveloppe, comme une corde pouſſée en chaque point par une force perpendiculaire (297), égale à la preſſion que l'air exerce intérieurement contre les parois de l'enveloppe. La réſultante de toutes ces preſſions doit (574) être dirigée ſuivant FED, c'eſt-à-dire, paſſer

par le concours des tangentes aux extrémités de cette corde, & elle doit être à l'effort qui ſe fait ſuivant BD :: ſin. : $a\,D\,B$ ou ſin. $a\,D\,u$ ſin. $F\,D$: a. Or l'angle $a\,D\,u$ eſt très-petit. Donc l'effort très-petit dirigé ſuivant $F\,D$, en produit un très-grand ſuivant $B\,D$; par la même raiſon, la preſſion faite ſur $a\,E\,B$ engendrera un effort conſidérable ſuivant $B\,F$; le poids P ſera donc tiré par deux forces très-conſidérables, ſuivant $B\,D$, $B\,F$, & qui auront d'autant plus d'effet que l'angle $F\,B\,D$ ſera plus petit, parce que leur effort réſultant approche d'autant plus d'être égal à leur ſomme.

Des Poulies & des Mouffles.

580. On connoît aſſez la figure de la poulie, pour qu'il ſoit ſuperflu d'en donner ici la deſcription.

On peut réduire toutes les différentes eſpèces de poulies, à deux; ſavoir, la poulie *fixe* ou *de renvoi*, & la poulie *mobile*.

La poulie fixe (*fig.* 72 & 73) eſt celle dans laquelle la puiſſance & le fardeau, ou l'obſtacle qu'elle doit vaincre, ſont appliqués tous deux ſuivant des directions tangentes à la circonférence de la poulie.

La poulie mobile (*fig.* 74 & 75) eſt celle dans laquelle le fardeau ou l'obſtacle eſt appliqué au centre, ou ſuivant une direction qui paſſe par le centre, ou par l'axe de la poulie.

581. A conſidérer généralement la poulie, cette machine eſt ſuſceptible de deux ſortes de mouvemens; l'un par lequel la corde qui paſſe dans la *gorge* de la poulie, c'eſt-à-dire, qui embraſſe la poulie, peut changer de place, ſans que pour cela le corps de la poulie ſoit déplacé; l'autre par lequel le corps de la poulie peut changer de ſituation. Ainſi l'équilibre dans cette machine, eſt aſſujetti à deux conditions abſolument diſtinctes; la première, que les tenſions des deux parties de la corde qui embraſſe la poulie, ſe détruiſent mutuellement; & pour cet effet, elles doivent être égales, quelle que ſoit d'ailleurs la courbure de la poulie (569). La ſeconde condition ſe déduit de cette première, de la manière ſuivante.

582. Des denſités des deux cordons qui embraſſent la poulie, il réſulte ſur le corps de cette machine, un effort que l'on déterminera en prenant ſur les directions des cordons, à compter de leur point de concours (*fig.* 72, 73 & 74), les parties égales IA, IB, & formant le parallélogramme $IADB$ dont la diagonale ID repréſentera l'effort qui s'exerce ſur le corps de la poulie, en ſuppoſant que IA repréſente la tenſion du cordon OP (*fig.* 72 & 73) ou OG (*fig* 74). Or à cauſe des tangentes IR, IO, & des lignes

égales IB, IA, il eſt facile de voir que DI prolongée, paſſe par le centre C de la poulie. Donc ſi le corps de la poulie n'eſt pas fixement aſſujetti, ID ne peut être détruit qu'autant que l'obſtacle quelconque qui doit empêcher le mouvement du corps de la poulie, ſera placé ſur quelque point de la ligne IC qui va du centre C, au point de concours des deux cordons qui embraſſent la poulie. Ainſi, ſi la poulie eſt deſtinée à tourner dans une chappe CG fixée à un point extérieur G (*fig.* 73), & ſi cette chappe peut tourner autour de G il n'y aura équilibre que lorſque la chappe CG ſera dirigée ſuivant CI.

Pareillement, ſi le corps de la poulie, étant embraſſé par une corde fixée au point G (*fig.* 74) eſt mobile, il n'y aura équilibre que lorſque l'effort appliqué au centre C ou à la chappe fixée à ce centre, diviſera en deux parties égales, l'angle des deux cordons OG, RQ, & que cet effort ſera à la tenſion de chacun des deux cordons OG, RQ :: ID : IA : IB.

583. D'après cela, il eſt facile de trouver le rapport des tenſions de chacun des deux cordons qui embraſſent la poulie, à l'effort qui en réſulte ſur le corps de la poulie, & par conſéquent à l'effort dont la poulie mobile (*fig.* 74) eſt capable.

La tenſion de chaque cordon étant repréſentée par

par IA ou ſon égale IB, l'effort qui s'exerce ſur le corps de la poulie, eſt exprimé par ID. Or dans le triangle IAD, $IA : ID ::$ ſin. IDA : ſin. IAD, ou : : ſin. CIQ : ſin. OAD, ou ſin. PIQ; on peut donc dire en général que *dans l'équilibre à l'aide de la poulie ſimple, fixe ou mobile, 1° les tenſions des deux cordons qui embraſſent la poulie, ou les puiſſances appliquées à ces cordons ſont égales. 2°. Chacune de ces puiſſances, eſt à l'effort qui ſe fait ſur le centre de la poulie, comme le ſinus de la moitié de l'angle que forment ces deux cordons, eſt au ſinus de cet angle entier.*

Ainſi, dans la poulie fixe (*fig.* 72 & 73), la puiſſance Q n'a d'autre avantage que celui de pouvoir changer à volonté la direction de ſon action. Mais dans la poulie mobile (*fig.* 74 & 75) la puiſſance Q a le double avantage de pouvoir changer ſa direction & augmenter l'effet de ſon action. Mais il faut remarquer qu'à meſure que ſa direction change, l'effort qu'elle exerce ſur le centre varie; enſorte qu'il y a une direction ſelon laquelle cet effort eſt le plus grand qu'il eſt poſſible; & c'eſt lorſque les deux cordons OC, RQ ſont parallèles, ainſi qu'on va le voir.

584. Si l'on mène les rayons OC, CR, (*fig.* 74) & la ſoutendante OR, le triangle OCR

aura ſes côtés perpendiculaires ſur ceux du triangle BID, & lui ſera par conſéquent ſemblable; on aura donc $IB : ID :: CR : OR$, c'eſt-à-dire, $Q : P :: CR : OR$; donc en général, *la tenſion d'un des cordons eſt à l'effort que ſupporte le centre, comme le rayon de la poulie, eſt à la ſoutendante de l'arc embraſſé par la corde.*

Or il eſt évident que ce dernier rapport eſt le plus grand qu'il eſt poſſible, & devient celui de 1 à 2, quand les cordons ſont parallèles (*fig.* 75); donc, dans la poulie mobile, la puiſſance eſt la plus petite qu'il eſt poſſible, lorſque les cordons ſont parallèles; & elle eſt alors la moitié du poids ſoutenu par le centre de la poulie.

585. Juſqu'ici nous avons attribué l'équilibre ſur la poulie, à ce que du concours des deux forces appliquées tangentiellement à la circonférence de la poulie, il réſulte une force unique, dont la direction paſſe par le centre de cette poulie, & y eſt détruite, dans la poulie fixe (*fig* 72) par la réſiſtance de l'axe de la poulie ſuppoſé inébranlable ou par la réſiſtance de la chappe (*fig.* 73); ou enfin par la réſiſtance d'un poids (*fig.* 74) qui lui eſt égal & directement oppoſé.

Mais comme la puiſſance, dans cette machine, eſt cenſée la ſeule choſe agiſſante; & que le poids,

ainſi que l'effort appliqué à la chappe, ſont ſeulement fonction de réſiſtance, il paroît plus naturel de ſuppoſer que l'action de la puiſſance ſe décompoſe en deux efforts, dont l'un eſt égal & directement oppoſé à l'effort appliqué à l'autre cordon tangentiel, & dont l'autre eſt égal & directemnt oppoſé à l'effort appliqué au centre de la poulie.

Par exemple, dans la poulie fixe (*fig.* 76) & dans la poulie mobile (*fig.* 77), ayant pris ſur la direction AQ de la puiſſance Q, & à compter du point A où elle concourt avec le cordon AF, une partie quelconque AB pour repréſenter cette puiſſance; on formera ſur AB, comme diagonale, un parallélogramme $ADBI$, dont les côtés AI, AD, ſoient ſur le prolongement de FA, & ſur la droite AC qui va du point de concours A au centre C. Alors on pourra concevoir que la puiſſance Q ſe décompoſe en deux efforts AI & AD. Or puiſqu'il y a équilibre, il faut que l'effort AI ſoit égal à la tenſion du cordon FP (*fig.* 76) ou FG (*fig.* 77), & que l'effort AD ſoit égal à celui que ſupporte le centre (*fig.* 76) ou au poids P (*fig.* 77); mais par les principes de la décompoſition (201), on a $AB : AD : AI ::$ ſin. DAI : ſin. BAI : ſin. BAD ou : : ſin. FAC : ſin. FAE : ſin. EAC, ce qui eſt la même choſe que nous avons vu (583).

Et en général, on trouvera toujours le même rapport, ſoit qu'on enviſage l'équilibre comme ſe faiſant par une compoſition de forces, ſoit qu'on le conſidère comme l'effet de la décompoſition.

Si les cordons ſont parallèles (*fig.* 75) on décompoſera la puiſſance Q en deux puiſſances parallèles *CB* & *OI*, comme il a été dit (208).

586. Donc ſi le poids *P* (*fig.* 78) eſt ſoutenu par la puiſſance Q, à l'aide de pluſieurs poulies mobiles embraſſées, chacune par un cordon dont une extrémité ſoit arrêtée à un point fixe, & l'autre à la chappe de la poulie voiſine, le rapport de la puiſſance au poids, ſera celui du produit des rayons de toutes les poulies mobiles, au produit des ſoutendantes des arcs embraſſés par les cordes.

En effet, ſi l'on appelle *N* & *M* les charges des centres des deux poulies *N* & *M*, qui ſont en même-temps les tenſions des deux cordons attachés aux centres *N* & *M*, & qu'on appelle r, r', r'' les rayons, & s, s', s'' les ſoutendantes des poulies *N*, *M*, *L*; on aura (584) $Q : N :: r : s$; $N : M :: r' : s'$; $M : L$ ou $P :: r'' : s''$; donc en multipliant par ordre, & ſupprimant les facteurs communs aux deux termes du premier rapport, on aura $Q : P :: r r' r''$

: $s\,s'\,s''$. Et ſi les cordons ſont parallèles, ce qui donne $s = 2r$, $s' = 2r'$, $s'' = 2r''$, on aura $Q : P :: rr'r'' : 2r \times 2r' \times 2r''$ $:: 1 : 2 \times 2 \times 2$, c'eſt-à-dire, que la puiſſance ſera au poids, comme l'unité eſt au nombre 2 élevé à une puiſſance marquée par le nombre des poulies mobiles; par exemple, avec trois poulies, la puiſſance Q ſoutiendroit huit fois ſa valeur.

587. Mais cette diſpoſition de poulies n'eſt pas la plus commode; on emploie plus ordinairement celles qui ſont repréſentées dans les *figures* 79, 80, 81, 82, 83, 84, auxquelles on donne le nom de *Moufles*; ce ſont pluſieurs aſſemblages de poulies toutes embraſſées par une même corde, dont les unes ſont fixes & les autres mobiles. Toutes les poulies fixes ſont portées ſur une même chappe, & toutes les poulies mobiles ſur une ſeule autre chappe. Tantôt (*fig.* 79, 80, 81 & 82) leurs centres ſont diſtribués ſur différens points de cette chappe; tantôt (*fig.* 83) ils ſont tous ſur un même axe.

588. Quelque différence qu'il y ait dans ces diſpoſitions particulières on peut toujours trouver le rapport de la puiſſance au poids, par ce principe. *La puiſſance eſt au poids comme le rayon ou ſinus de 90 degrés, eſt à la ſomme des ſinus des*

angles que font avec l'horizontale des cordons aboutiſſans à la mouſle mobile.

En effet, ſi ſur chacun de ces cordons (*fig.* 79 & 80) on prend les parties égales im, np, &c. pour repréſenter leur tenſion, & que ſur chacune de ces lignes comme diagonale, on forme un parallélogramme, dont deux côtés ſoient verticaux, & les deux autres horizontaux; au lieu de conſidérer le poids P, comme ſoutenu par les tenſions immédiates des cordons, on pourra le conſidérer comme ſoutenu par le concours des forces horizontales ik, no, &c. & des forces verticales il, nq, &c. Or les premières étant perpendiculaires à la direction de l'action du poids, ne contribuent point à contrebalancer cette action; & dans l'équilibre, elles ſe détruiront mutuellement. Le poids P n'eſt donc ſoutenu que par la réſultante, c'eſt-à-dire, par la ſomme des forces verticales il, nq, &c. Or dans les triangles rectangles iml, nqp, &c. on a $im : il :: 1 :$ ſin. iml; np ou $im : nq :: 1 :$ ſin. npq; & ainſi des autres cordons; donc $il = im$ ſin. iml; $nq = im$ ſin. npq; donc enfin $Q : P :: im : im$ ſin. $iml + im$ ſin. $npq +$ &c. ou $: : 1 :$ ſin. $iml +$ ſin. $npq +$ &c.

589. Si les cordons ſont parallèles, & par con-

ſéquent verticaux, les angles *iml*, *npq*, &c. ſeront droits, & par conſéquent leurs ſinus ſeront chacun égal au rayon 1. Donc alors la puiſſance ſera au poids comme 1 eſt à la ſomme d'autant d'unités qu'il y a de cordons aboutiſſans à la mouſle mobile. D'où l'on voit que *ſi une des extrémités de la corde eſt attachée à la mouſle fixe* (fig. 81), *la puiſſance ſera au poids, comme l'unité eſt au double du nombre des poulies de la mouſle mobile. Et ſi l'extrémité de la corde eſt attachée à la mouſle mobile* (fig. 82), *la puiſſance ſera au poids, comme l'unité eſt au double du nombre des poulies de la mouſle mobile, augmenté d'une unité.*

590. La propoſition générale que nous venons de démontrer, a lieu, ſoit que les cordons ſoient ou ne ſoient pas dans un même plan. Et ſi l'obſtacle que l'on a deſſein de forcer en faiſant uſage des mouſles n'étoit pas un poids; c'eſt-à-dire, ſi la direction de l'effort total de la mouſle n'étoit pas verticale, cette propoſition n'auroit pas moins lieu, en ſubſtituant aux angles que les cordons étoient ſuppoſés faire avec le plan horizontal, ceux qu'ils font avec le plan perpendiculaire à l'effort total de la mouſle. Par exemple, dans la *figure* 84 la puiſſance Q eſt à l'effort qui ſe fait en G, comme le rayon eſt à la ſomme des ſinus des angles que

chacun des cordons aboutiſſans à la mouſle *EF* ſont avec un plan perpendiculaire à *FG*.

591. Si l'on emploie pluſieurs mouſles, tant fixes que mobiles, il ſera encore facile, d'après ce qui précède, d'avoir le rapport de la puiſſance au poids.

Par exemple, dans la *figure* 84, les cordons étant ſuppoſés parallèles, la puiſſance Q, eſt à l'effort qui ſe fait ſuivant *BC* (589) : : 1 : 5 ; or ce dernier effort fait l'office de puiſſance à l'égard de l'équipage *BA*; il eſt donc à l'égard du poids *P*, comme 1 : 4; donc (en multipliant par ordre), la puiſſance Q eſt au poids *P* : : 1 : 20; ainſi, un effort de 50$^{£}$, par exemple, ſoutiendroit un poids de 1000$^{£}$.

592. Dans tout ce qui précède, nous avons fait abſtraction de la peſanteur des poulies, chappes, &c. du frottement & de la roideur des cordes. Nous verrons plus bas comment on doit avoir égard à ces deux dernières ſortes de réſiſtances. A l'égard de la peſanteur des parties mobiles que la puiſſance doit ſoutenir, la manière d'y avoir égard dans le cas de l'équilibre, eſt de comprendre leur valeur totale dans celle du poids *P*, lorſque (*fig.* 81 & 82) l'action totale de leur poids coïncide avec celle de *P*; mais ſi comme on le

voit (*fig.* 84) la peſanteur de l'équipage *CF* ne s'exerce pas ſuivant la même ligne *BC* ſuivant laquelle s'exerceroit l'effort de cet équipage ſans la peſanteur ; alors *BC* n'eſt plus dans cette dernière direction, mais dans la direction de la réſultante de la peſanteur de cet équipage, & de l'effort qu'il feroit ſans la peſanteur ; mais comme cet objet eſt de peu de conſidération dans les cas où l'on emploie les poulies de cette manière, nous n'entrerons pas dans l'examen du rapport exact qu'il y a alors entre la puiſſance & le poids.

593. A l'égard du mouvement dans la poulie, nous n'examinerons ici que celui qu'elle donne au poids *P*, lorſque les cordons ſont parallèles. Or il eſt évident que dans la poulie fixe & ſimple, (*fig.* 72) le poids *P* ne peut avoir que la même vîteſſe que la puiſſance *Q* ; & dans la poulie ſimple & mobile (*fig.* 75) le poids va deux fois moins vîte que la puiſſance.

Dans les mouffles, les cordons étant parallèles, la vîteſſe du poids eſt à celle de la puiſſance, comme la puiſſance eſt au poids dans le cas de l'équilibre. Car il eſt évident que ſi la mouffle mobile (*fig.* 81 *& ſuiv.*) a monté d'un pied, par exemple, chacun des cordons aboutiſſans à cette mouffle s'eſt accourci d'un pied ; donc celui auquel la puiſſance eſt ap-

pliquée, a dû s'allonger, d'autant de pieds qu'il y a de cordons aboutiſſans à la mouſle mobile.

594. Lorſqu'on emploie les poulies dans des machines où la régularité & la préciſion des mouvemens ſont néceſſaires, alors il faut avoir égard à leur inertie ; mais le mouvement de rotation qu'elles prennent, étant l'effet du frottement, nous remettons à en parler plus bas.

Du Levier, lorſque les forces qui lui ſont appliquées ſont toutes dans un même plan.

595. Par *levier*, nous entendons ici une verge inflexible, de quelque figure que ce ſoit, tellement fixée en l'un *C* de ſes points (*fig.* 85 & 86), qu'elle ne puiſſe prendre d'autre mouvement par l'action des forces qui lui ſeroient appliquées, qu'un mouvement de *rotation* ; c'eſt-à-dire, un mouvement pour tourner autour de *C*. Ce point *C* s'appelle *point d'appui*.

596. Nous regarderons d'abord le levier comme ſans maſſe & ſans peſanteur. Dans le cas de l'équilibre, on peut aiſément avoir égard à ſa peſanteur, en la conſidérant comme raſſemblée au centre de gravité de ce levier, & comme une nouvelle force

qu'on lui appliqueroit en ce point, ſuivant une direction verticale. Dans le cas du mouvement, ce n'eſt point au centre de gravité qu'il faut imaginer la maſſe raſſemblée pour avoir l'effet qu'elle peut produire; c'eſt en un autre point que nous déterminerons dans peu.

597. Nous ſuppoſerons que les forces appliquées au levier ſont toutes dans un même plan avec le point d'appui. Nous traiterons dans un autre article, de l'équilibre & du mouvement, lorſque les forces appliquées au levier, ſont dans différens plans.

598. Suppoſons donc que deux puiſſances P & Q (*fig.* 85 & 86) appliquées aux deux points B & D du levier BCD, ſoit immédiatement, ſoit par le moyen de deux cordons ou de deux verges ſans maſſes, agiſſent ſur ce levier ſuivant les directions BP, DQ, & ſe faſſent équilibre; il s'agit de déterminer les conditions de cet équilibre.

Comme l'une quelconque des deux puiſſances, la puiſſance Q, par exemple, ne fait équilibre à l'autre, qu'à l'aide du point d'appui C, il eſt clair que la puiſſance Q doit produire deux efforts, dont l'un anéantiſſe celui de la puiſſance P, &

dont l'autre ſoit détruit par le point d'appui C, & par conſéquent, paſſe par ce point.

Prolongeons indéfiniment les directions PB & QD qui ſe rencontrent en A, & menons AC. Nous pouvons (196) ſuppoſer la puiſſance Q appliquée en A ſuivant AQ; alors ſi AG repréſente la valeur de cette puiſſance, & que ſur AG comme diagonale, & ſur les directions AC, BAE, comme côtés contigus, on forme le parallélogramme $AHGE$; AE repréſentera (193) l'effort que Q exerce dans la direction & en ſens contraire de P; & AH, celui qu'elle exerce contre le point d'appui C. En effet, quoique le point A ne ſoit point lié aux deux points B & C, la diſtribution de la force Q ne s'en fait pas moins de la même manière que s'il y étoit lié. Car il eſt évident que ſi, ſans rien changer aux forces & à leurs directions, on lioit le point A aux trois points B, C, D, par trois verges inflexibles AB, AC, AD ſans maſſe, cela ne changeroit rien du tout à l'état préſent du ſyſtême, & par conſéquent à la manière dont la force Q communique ſon action; or dans ce dernier cas, l'action de la force Q ſeroit viſiblement communiquée de la manière qui vient d'être décrite; donc elle eſt communiquée de la même manière dans le premier cas.

Cela posé, puisqu'il y a équilibre, & que la force AE est directement opposée à la force P, il faut qu'elle lui soit égale. Quant à la force AH, il suffit pour qu'elle soit détruite, qu'elle soit dirigée au point C.

On a donc en nommant C la charge que supporte l'appui C, $Q : P : C :: AG : AE : AH$.

559 Si, de A vers B, on prend $AI = AE$, & que l'on mène IH, il est facile de voir que $AIHG$ est un parallélogramme. Or AI, AG côtés de ce parallélogramme, marquent les valeurs & les directions des deux forces P & Q; donc la diagonale AH représente leur résultante; donc puisque AH représente aussi la charge du point d'appui, il faut en conclure qu'en général, la charge du point d'appui, est précisément la résultante des deux forces appliquées au levier; & que par conséquent ces deux forces agissent sur l'appui, comme si elles y étoient immédiatement appliquées suivant des directions parallèles à celles qu'elles ont actuellement.

600. Au reste, on peut voir immédiatement cette dernière vérité, en faisant attention que puisqu'à la force Q on peut substituer les deux forces AE, AH dont la première est détruite par la force P, la force restante AH est l'effet

unique auquel ſe réduiſent les deux forces P & Q, & par conſéquent la réſultante de ces deux forces.

601. La ſuite des rapports $Q : P : C : : AG : AE : AH$ que nous venons de trouver (598) fournit donc le moyen de comparer les forces Q & P, tant entr'elles qu'avec la charge C de l'appui. Mais comme ce rapport n'eſt pas le plus commode à employer, voici deux autres moyens qu'on peut employer dans la même vue.

1°. Selon ce qui a été dit (201) on a AG . $AE : AH : :$ ſin. HAE : ſin. HAG : ſin. GAE, ou : : ſin. HAI : ſin. HAG : ſin. GAI, parce que les angles HAE, GAE, ont même ſinus que leurs ſupplémens HAI, GAI; donc $Q : P : C : :$ ſin. HAI : ſin. HAG : ſin. GAI; c'eſt-à-dire, que des deux forces Q & P, & de la charge de l'appui C, chacune eſt repréſentée par le ſinus de l'angle compris entre les directions des deux autres.

2°. Nous avons vu (202) que de trois forces, dont l'une eſt la réſultante des deux autres, deux quelconques ſont toujours entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires menées ſur les directions, d'un point quelconque pris ſur la direction de la troiſième.

Donc ſi de tel point que ce ſoit de AC; ſi de C, par exemple, on mène les perpendiculaires CL, CM ſur les directions PB, QD, on aura $Q : P :: CL : CM$.

602. Pareillement ſi de tel point que ce ſoit de la direction de Q; ſi du point D, par exemple, on mène les perpendiculaires DO, DR ſur les directions de la force P & de la charge de l'appui, on aura $P : C :: DR : DO$. On comparera de même la force Q avec la charge C.

Toutes ces vérités ont lieu, quelle que ſoit la figure du levier, & quelles que ſoient les directions des deux puiſſances.

603. Lorſque les directions des deux puiſſances ſont parallèles (auquel cas la réſultante ou la charge de l'appui leur eſt parallèle) les perpendiculaires menées d'un même point de la direction de l'une d'entr'elles, ſur les directions des deux autres, ſe trouvent toutes ſur une même ligne LCM (*fig.* 87). On peut donc dire alors que ſi l'on mène une ligne LCM perpendiculaire aux directions des puiſſances, chaque puiſſance eſt repréſentée par la partie de cette droite, compriſe entre les directions des deux autres.

604. Si, de plus, le levier eſt droit, alors

il eſt aiſé de voir, par les triangles ſemblables CLB, CMD, que les parties CB, CD, BD, ont même rapport entr'elles que les parties CL, CM, LM; donc on peut dire dans ce cas, que chaque force eſt repréſentée par la partie du levier compriſe entre les directions de deux autres; ainſi $Q : P :: CB : CD$, c'eſt-à-dire, que les deux puiſſances ſont en raiſon inverſe des bras de levier CB, CD; enſorte que la puiſſance Q doit être d'autant plus petite pour faire équilibre à la puiſſance P, que le bras CD auquel elle eſt appliquée, eſt plus grand que le bras BC auquel P eſt appliquée. A l'égard de la charge de l'appui, elle eſt égale à la ſomme des deux puiſſances P & Q, puiſque celles-ci (203) étant repréſentées par CD & BC, la charge l'eſt par BD.

605. Si l'on diſtingue (*fig.* 88, 89 & 90) une puiſſance Q, motrice, ou prête à donner le mouvement, un mobile P, & un appui C; on pourra, avec les Anciens, diſtinguer trois ſortes de levier, ſuivant les trois différentes poſitions que la puiſſance peut avoir à l'égard du mobile & de l'appui.

La *figure* 88 repréſente ce qu'on appelle *levier de la première eſpèce*; la puiſſance & le mobile y ſont de part & d'autre de l'appui, & la puiſſance a d'autant plus d'avantage (601) qu'elle eſt plus éloignée du point d'appui.

La

La *figure* 89 repréſente le *levier de la ſeconde eſpèce* où le mobile eſt entre l'appui & la puiſſance qui par conſéquent a toujours de l'avantage.

Enfin la *figure* 90 repréſente le *levier de la troiſième eſpèce* ou la puiſſance eſt entre l'appui & le mobile; elle a donc alors un déſavantage réel, & par conſéquent ce levier ſeroit mal employé dans les cas où il s'agit d'augmenter l'effet de la force motrice, c'eſt-à-dire, de la mettre en état de ſurmonter une force plus grande qu'elle-même. Mais, ainſi que nous l'avons déjà obſervé, comme on n'a pas toujours pour objet de multiplier la force motrice, cette conſidération n'empêche pas que cette troiſième eſpèce de levier ne puiſſe être employée très-utilement dans des machines où l'on veut profiter de tous les mouvemens dont on peut diſpoſer. C'eſt ainſi, par exemple, qu'on l'emploie avec avantage dans les métiers à toiles, à draps & autres étoffes, où les mains de l'ouvrier occupées au tiſſu de l'étoffe ne peuvent être employées à donner le mouvement à la machine; on y emploie les pieds qui en appuyant ſur les pédales CD tirent ſur la corde BR, laquelle par-deſſus la poulie R, va joindre l'aſſemblage qui ſert à élever & à baiſſer alternativement les fils, & qui ayant peu de poids n'exige pas une force conſidérable. La machine du Rémouleur ou Gagne-petit, certains rouets à filer, ſont dans le même cas, ainſi que beaucoup d'autres machines.

606. Obſervons, avant que d'aller plus loin, qu'abſtraction faite du frottement, le point d'appui d'un levier ne doit pas être conſidéré comme un ſimple ſoutien. En effet, (*fig.* 86) ſi l'appui C au lieu de pénétrer dans l'intérieur du levier, en

touchoit ſeulement la ſurface, il eſt facile de voir que quoique les deux puiſſances Q & P fuſſent entr'elles en raiſon inverſe des perpendiculaires CM CL, elles ne pourroient être en équilibre ſur ce levier que dans un ſeul cas; ſavoir, quand la direction AC ſeroit perpendiculaire à BD (ou à la tangente en C dans la *figure* 85); car ſi AC étoit oblique, il eſt facile de voir qu'elle communiqueroit au levier un mouvement ſuivant BD; ainſi ce ſeroit une erreur de croire, par exemple, qu'abſtraction faite du frottement & de la peſanteur du levier PQ (*fig.* 91) les deux poids P & Q demeureroient en équilibre dans la ſituation inclinée, ſi P étant à Q : : CQ : CP, la ſurface du levier s'appuyoit ſeulement ſur le point C. Le point d'appui tel qu'on doit le concevoir pour qu'il y ait équilibre dans toutes les poſitions du levier, doit faire l'effet d'une broche qui paſſant par C, permettroit ſeulement au levier de tourner autour de C. En un mot, quand on dit qu'il ſuffit que la réſultante AC des deux puiſſances paſſe par le point d'appui C, c'eſt en ſuppoſant que le point correſpondant C du levier ne peut prendre aucun mouvement; car cette condition ne ſuffit plus dès qu'il peut en prendre.

Par exemple, ſi le levier BD (*fig.* 92) étoit tiré par les trois puiſſances P, Q, R appliquées aux trois cordons BP,

DQ, CR, il n'y auroit point équilibre ſi AC étoit la direction de la réſultante de P & de Q, quoique AC paſſe par l'appui C; il faudroit encore que le point de concours A fût ſur CR.

607. Puiſque les deux forces P & Q qui doivent ſe faire équilibre à l'aide du levier BCD (*fig. 85 & ſuiv.*) doivent être en raiſon inverſe des perpendiculaires CL, CM; c'eſt-à-dire, puiſqu'on doit avoir $P : Q :: CM : CL$, il s'enſuit que $P \times CL = Q \times CM$, c'eſt-à-dire, que les momens de ces deux forces pris par rapport au point d'appui, ou (217) par rapport à tout autre point de la direction AC, doivent être égaux.

608. Comme il ne peut y avoir de force ſans une tendance au mouvement, on doit par ces expreſſions *les forces* P & Q, entendre le produit d'une certaine maſſe par la vîteſſe que ces forces lui communiqueroient ſi elle étoit libre. Ainſi, ſoit M une certaine maſſe & V la vîteſſe que la force P agiſſant librement ſur cette maſſe, peut lui communiquer. Soit pareillement M' une autre maſſe quelconque, & V' la vîteſſe que la force Q eſt capable de lui communiquer; il faudra donc pour l'équilibre, que l'on ait $M \times V : M' \times V' :: CM : CL$.

609. Soit g la vîteſſe que la peſanteur donne, dans un inſtant, à toute partie matérielle en liberté; & ſoient M & M' (*fig.* 93) deux corps peſans attachés aux deux cordons BIM, DKM' qui, paſſant par-deſſus les renvois courbes I & K, tranſmettent entièrement au levier BCD, ſuivant les directions quelconques BI & DK, l'action de la peſanteur de ces corps; on aura $g \times M$ ou gM, & gM' pour la meſure des forces avec leſquelles ces corps agiſſent; il faudra donc, pour l'équilibre, que $gM : gM' :: CO : CN$, c'eſt-à-dire, $M : M' :: CO : CN$; donc, en général, pour que deux maſſes qui ne ſont ſollicitées que par leur peſanteur, ou pour que deux maſſes qui ſeroient animées de vîteſſes égales ſe faſſent équilibre ſur un levier, il ſuffit que ces maſſes ſoient en raiſon inverſe des diſtances du point d'appui aux directions ſuivant leſquelles ces forces tirent le levier.

610. Mais ſi les vîteſſes n'étoient pas égales, on voit que ce doivent être, non les maſſes ſeulement, mais les produits des maſſes par les vîteſſes, qui ſoient en raiſon inverſe des diſtances de leurs directions au point d'appui.

611. Si deux maſſes finies & peſantes M & M' (*fig.* 93) viennent à recevoir des viteſſes finies & inégales ſuivant les cordons IM & KM';

comme la vîteſſe que la peſanteur peut leur imprimer dans un inſtant eſt infiniment petite, il ſuffira pour que les deux vîteſſes finies ſe détruiſent mutuellement, que les quantités de mouvement que les deux corps auroient en vertu de ces vîteſſes, ſoient en raiſon inverſe de *CO* & *CN*. Mais cet équilibre n'aura lieu qu'un inſtant; car dès que ces vîteſſes ſe ſeront détruites mutuellement, les corps *M* & *M'* ſoumis à l'action de leur peſanteur, en recevront des quantités de mouvement qui ſeront dans le rapport ſimple des maſſes, & qui par conſéquent ne ſeront plus dans le rapport inverſe des diſtances *CO*, *CN*.

On voit par-là, la différence qu'il y a entre l'équilibre des poids animés par la peſanteur ſeulement, & celui des poids animés de vîteſſes finies.

612. Une autre remarque qu'il eſt encore à propos de faire ici, c'eſt qu'il eſt impoſſible de mettre en équilibre un poids animé de ſa ſeule peſanteur avec un poids ou une maſſe animé d'une vîteſſe finie; la raiſon en eſt la même que celle que nous avons expoſée (*359*). D'où il faut conclure que ſi le poids *P* (*fig.* 88) eſt en équilibre avec une force Q telle que celle d'un homme, d'un animal, &c. cette dernière ne tend à faire mouvoir le point *D* qu'avec une vîteſſe infini-

ment petite. Si au contraire la force Q appliquée en *D* agiſſoit par une ſecouſſe ou impreſſion finie, elle feroit monter le poids *P*, tel qu'il fût, du moins pendant un certain temps qui, lorſque *P* ſera un peu conſidérable, peut être tel que l'œil ne puiſſe pas ſaiſir ce mouvement, mais ce mouvement n'en ſera pas moins réel. Voyez ce que nous avons dit (359).

Nous avons jugé devoir placer ici ces réflexions qui ne peuvent que fixer l'eſprit des commençans ſur la véritable idée qu'ils doivent ſe former des forces appliquées aux machines; on en ſentira encore mieux l'importance à meſure que nous avancerons.

613. Les rapports que nous avons établis (598 *& ſuiv.*) entre les deux puiſſances *P* & Q, & la charge *C* de l'appui (*fig.* 85 *& ſuiv.*) mettent en état de réſoudre cette queſtion générale. *Trois de ces ſix choſes étant données, les deux puiſſances, la charge de l'appui, & leurs directions; trouver les trois autres?* Quand les directions ſeules ſont données, alors on ne peut avoir que le rapport des puiſſances. La ſolution de cette queſtion eſt évidente par ce qui a été dit (559); elle peut s'exécuter auſſi par des conſtructions géométriques faciles à trouver, mais dans le détail deſquelles

nous n'entrerons point; nous obſerverons ſeulement que quand les directions ſont paralèles, alors ce qui a été dit (206 & *ſuiv.*) ou (603), réſout la queſtion, & qu'en général s'il s'agit de déterminer la poſition de l'appui lorſque l'on connoît les puiſſances *P* & *Q*, & leurs poſitions, la queſtion ſe réduit à trouver la poſition de la réſultante de ces deux puiſſances, ce qui eſt facile par ce qui a été dit (206).

614. Il n'en eſt pas de même, lorſqu'il y a plus de deux puiſſances appliquées au levier; alors on peut [de même qu'on l'a vu pour les cordes (570)] varier à l'infini les rapports ou les directions de quelques-unes des puiſſances, en laiſſant les autres les mêmes, & cependant avoir toujours équilibre; mais il y a cette différence entre le levier & les cordes, que la condition de l'équilibre ſur le levier eſt unique; au lieu que pour les cordes, il y a autant de conditions que de nœuds (572). Il nous ſuffira de faire connoître cette condition pour trois puiſſances, pour faire ſentir qu'elle doit avoir lieu de même pour quelque nombre de puiſſances que ce ſoit.

615. Soient donc (*fig.* 94) trois puiſſances *P*, *Q*, *R*, dirigées ſuivant *BP*, *EQ*, *DR*, en équilibre ſur le levier *BCED*. La puiſſance *Q*

fait effort contre chacune des deux puiſſances P & R, & contre l'appui C.

Ayant prolongé les directions, & pris, à compter de la rencontre A & de BP & EQ, la ligne AH pour repréſenter la puiſſance Q, j'imagine cette puiſſance décompoſée en deux autres, l'une AG égale & directement oppoſée à la puiſſance P, l'autre AF telle qu'elle puiſſe faire équilibre à la puiſſance R au moyen de l'appui C. Donc la direction DR rencontrant AF au point I, conçoit la force AF appliquée en I ſuivant IL; il faut que la force AF ou IL puiſſe décompoſer en deux autres forces, l'une IK égale & directement oppoſée à la puiſſance R, l'autre IM dirigée au point d'appui C. Par ce moyen la force Q produit les trois effets AG, IK, IM, dont les deux premiers étant égaux & directement oppoſés aux forces P & R, ſont détruits; & dont le dernier, étant dirigé au point fixe C, ne peut manquer d'être détruit auſſi. Or puiſque toutes les forces qui agiſſent ſur le levier ſont P, Q, R, ou AG, IK, IM, P & R, dont AG, IK, P & R ſe détruiſent, concluons-en donc que IM eſt la réſultante des trois puiſſances P, Q, R; que par conſéquent la condition unique à laquelle l'équilibre eſt aſſujetti, eſt que la réſultante de toutes les puiſſances paſſe par le point d'appui C; on voit donc que

les puiſſances P, Q, R agiſſent ſur l'appui C, comme ſi elles y étoient immédiatement appliquées ſuivant des directions parallèles à celles qu'elles ont actuellement. Et cela eſt général pour quelque nombre de puiſſances que ce ſoit, parce qu'on peut toujours ſuppoſer qu'une ſeule des puiſſances fait équilibre à toutes les autres, à l'aide de la réſiſtance de l'appui.

616. Puiſque C doit être un des points de la réſultante, il doit donc avoir les propriétés dont nous avons fait mention (217); c'eſt-à-dire, qu'en général *lorſque pluſieurs puiſſances dirigées dans un même plan ſe font équilibre à l'aide d'un levier de figure quelconque; ſi du point d'appui on mène des perpendiculaires ſur les directions de ces forces, & qu'on multiplie chaque force par la perpendiculaire correſpondante, c'eſt-à-dire, ſi on prend les momens de ces forces par rapport au point d'appui, la ſomme des momens des forces qui tendent à faire tourner le levier dans un ſens, doit être égale à la ſomme des momens de celles qui tendent à le faire tourner en ſens contraire*; ce qu'on peut exprimer généralement, en prenant avec des ſignes contraires les momens des forces qui tendent à faire tourner en ſens oppoſés, & diſant que *la ſomme des momens doit être zéro.*

617. Donc tout ce que nous avons dit (219

& ſuiv.) pour trouver la valeur & la direction de la réſultante, aura lieu ici pour trouver la charge & la poſition du point d'appui, quel que ſoit le nombre des puiſſances.

618. Si connoiſſant les deux poids P & Q (*fig. 95*), la longueur & le poids BD du levier, on veut déterminer le point d'appui C, ſur lequel le tout peut demeurer en équilibre; on imaginera que le poids du levier eſt une nouvelle force verticale R appliquée au centre de gravité E de ce levier, & il faudra que le moment de P par rapport au point inconnu C, ſoit égal à la ſomme des momens des deux points R & Q, pris par rapport au même point inconnu C.

Suppoſons, pour en donner un exemple, que le levier BD eſt droit, d'une groſſeur & d'une peſanteur uniforme; & faiſant attention qu'à cauſe des parallèles, on peut, au lieu des perpendiculaires CI, CK, CL, employer les parties BC, CE, CD qui ont même rapport entre elles; on aura $P \times BC = R \times CE + Q \times CD$.

Soit a, la longueur du levier; x, la diſtance BC; on aura (251) $BE = \frac{1}{2}a$; $CE = \frac{1}{2}a, -x$, $CD = a - x$. Soit p la peſanteur ſpécifique du levier, c'eſt-à-dire, pour fixer les idées; ce que pèſe ce levier, par pouces de longueur, a & x étant comptés en pouces; pa ſera ſon poids total R. On aura donc $Px = pa\left(\frac{1}{2}a - x\right) + Q \times (a - x)$; d'où l'on tirera $x = \frac{\frac{1}{2}paa + Qa}{P + pa + Q}$.

Soit $a = 24$ pouces, $P = 20£$, $Q = 4£$, $p = \frac{1}{12}$ de livre. On aura donc $x = \frac{120}{26} = 4$ pouces $\frac{8}{13}$, c'eſt-à-dire, qu'il faut mettre le point d'appui C, à 4 pouces $\frac{8}{13}$, de l'extrémité B; au lieu qu'en négligeant la peſanteur du levier, on auroit $x = \frac{Qa}{P+Q} = \frac{96}{24} = 4$ pouces.

619. Si au contraire, on donnoit le point B, le point C, & qu'il fallut trouver le point D, où doit être appliquée la puiſſance Q ſuppoſée connue, ainſi que P, on repréſenteroit BC par b, & BD par y; alors l'équation des momens ſe changeroit en $Pb = py\left(\frac{1}{2}y - b\right) + Q(y - b)$, qui donneroit.....

$$y = \frac{pb - Q \pm \sqrt{[(Q - pb)^2 + (2Pb + 2Qb)p]}}{p},$$

dont la valeur poſitive donne la diſtance BD dans la *figure* 95; & dont la valeur négative donne la diſtance BD (*fig.* 96) en ſuppoſant que la diſtance BC eſt ſans peſanteur.

Si l'on veut avoir la diſtance y à laquelle le poids de la partie CD (*fig.* 95) ſuffira pour faire équilibre au poids P, on fera $Q = 0$, & l'on aura.....

$$y = \frac{+pb + \sqrt{(p^2b^2 + 2pPb)}}{p}.$$

620. Si dans la *figure* 97, on veut, connoiſſant P, Q, BC, & la peſanteur ſpécifique du levier DC, déterminer la diſtance CD où doit agir la puiſſance D; nommant CD, y; BC, b; on aura py pour le poids R; il faudra donc que $Pb + \frac{1}{2}pyy = Qy$, d'où il ſera facile d'avoir y.

621. Dans la *figure* 95, il eſt facile de voir que plus

le levier ſera long, & plus la puiſſance Q doit diminuer juſqu'à devenir zéro, après quoi elle doit agir en ſens contraire.

Dans la *figure* 97, la longueur du levier augmentant, la puiſſance Q va d'abord en diminuant, mais juſqu'à un certain terme ſeulement, paſſé lequel elle doit augmenter. C'eſt ce qu'il eſt aiſé de voir de pluſieurs manières; & entr'autres par l'équation $Pb + \frac{1}{2}pyy = Qy$ qui donnant..... $Q = \frac{Pb + \frac{1}{2}pyy}{y}$, fait voir que lorſque $y = o$, Q doit être infinie; & qu'elle le doit être auſſi lorſque y eſt infinie; donc entre ces deux cas extrêmes, elle doit avoir des valeurs finies; donc pour paſſer de l'une à l'autre, il y aura un terme où elle aura la plus petite valeur poſſible. Pour déterminer ce terme, il n'y a autre choſe à faire (36) qu'à égaler à zéro la différencielle de la valeur de Q, priſe en regardant y ſeule comme variable. On aura donc —..... $\frac{(Pb + \frac{1}{2}py^2)\,dy}{yy} + p\,dy = o$, qui donne $y = \sqrt{\frac{(2Pb)}{p}}$. Donc *la valeur de la plus petite puiſſance* Q *que l'on puiſſe employer avec un levier peſant, de la ſeconde eſpèce, eſt* $\sqrt{(2Ppb)}$; *& la longueur de ce levier eſt* $\sqrt{\frac{(2Pb)}{p}}$.

On voit donc que lorſqu'avec un levier peſant, on veut ſoulever un fardeau F (*fig.* 98), il y a une certaine longueur à donner à ce levier pour y employer la moindre force poſſible; & qu'en deçà ainſi qu'au delà de cette longueur, il n'y a qu'à perdre. Il n'en eſt donc pas du levier lorſqu'on a égard à ſa peſanteur, comme du levier conſidéré ſans peſanteur. Au reſte, dans l'exemple que nous prenons

ici (*fig.* 98), il ne faudroit pas prendre pour P, la valeur totale du fardeau F; nous verrons par la ſuite, ce qu'on doit en prendre.

622. On emploie auſſi fort utilement le levier de la première eſpèce à ſoulever de très-gros fardeaux, comme des chariots, des pièces d'artillerie, &c. en le montant comme on le voit (*fig.* 99), ſur des *chevrettes*. Les chevrettes (*fig.* 100) ſont compoſées de deux montans AB, CD aſſemblés ſur deux pièces EF, GH qui portent à terre & qui ſont entretenues par deux entre-toiſes EG, FH. Ces deux montans ſont traverſés par un boulon AC fixe & qui ne ſert qu'à les lier, & par un autre boulon que l'on peut déplacer & faire paſſer à volonté dans les différens trous des montans; ce dernier boulon traverſe perpendiculairement le levier MN (*fig.* 99) au point O, & on élève par conſéquent ou on abaiſſe le point d'appui à volonté.

623. C'eſt au levier de la première eſpèce qu'on doit rapporter la balance ordinaire (*fig.* 101) ou celle qui eſt deſtinée à peſer des corps par des poids qui leur ſoient égaux, & celle qu'on appelle *romaine* ou *peſon* (*fig.* 102), & qui eſt deſtinée à peſer les corps à l'aide d'un poids conſtant p.

La balance étant d'un très-grand uſage dans preſque tous les Arts, nous nous arrêterons un moment à examiner les principales conditions de ſa conſtruction.

624. Pour plus de généralité, ſuppoſons que le point C (*fig.* 109), autour duquel le fléau doit être mobile, ne ſoit pas dans la ligne AB qui joint les points de ſuſpenſion des deux baſſins; & que le point g que je ſuppoſe être le

centre de gravité du fléau, non compris les baſſins & leurs dépendances, ſoit hors de la verticale qui paſſe par C.

La première condition de la conſtruction de cette machine, eſt que l'aiguille ſoit verticale, ou, ce qui revient au même, que la ligne AB qui joint les points A & B de ſuſpenſion des deux baſſins, ſoit horizontale lorſque les baſſins ſont vides, & lorſqu'ils ſont chargés d'un poids égal.

Soient p & p' les poids des deux baſſins EF, GH, en y comprenant leurs cordes ou chaînes, & leurs anneaux; P le poids que l'on doit mettre dans chaque baſſin.

Les deux baſſins étant vides, & la ligne LCD étant verticale, on aura $p \times AD = p' \times BD + g \times gi$, en appelant g le poids du fléau, & menant la perpendiculaire gi ſur CD.

Les deux baſſins étant chargés chacun du poids P, on aura $(P + p) \times AD = (P + p') \times BD + g \times gi$. Retranchant la première égalité de la ſeconde, on aura $P \times AD = P \times BD$ ou $AD = BD$, & par conſéquent $AC = BC$.

Ainſi la condition eſſentielle pour que cette machine puiſſe conſerver une poſition conſtante, les baſſins étant chargés de poids égaux quelconques, eſt que les deux bras AC & BC ſoient égaux.

625. L'égalité de poids des deux bras AC & BC, n'eſt donc point néceſſaire. Si les deux bras AC & BC ont exactement la même longueur, & ſi on a donné au poids des baſſins, le rapport néceſſaire pour que le fléau ſoit horizontal par le poids ſeul de ces baſſins, & de leurs dépendances, le fléau ne peut manquer de reſter horizontal, lorſ-

qu'on chargera ces baſſins chacun d'un poids égal quelconque.

626. S'il y avoit quelqu'inégalité entre les longueurs des deux bras, les poids contenus dans les baſſins ne pourroient plus ſe faire équilibre qu'autant qu'ils ſeroient inégaux. Leur équilibre ne ſeroit donc plus un indice certain de leur égalité. Mais ſi on les change de baſſin, l'équilibre ne pourra évidemment ſubſiſter. On reconnoîtra donc à cette épreuve, ſi la balance eſt exacte, c'eſt-à-dire, ſi les deux bras ſont égaux en longueur.

627. Les deux bras AC & BC ayant exactement la même longueur, dès qu'il y aura la plus petite inégalité entre les deux poids placés dans chaque baſſin, l'équilibre doit être rompu, & la balance doit s'incliner. Mais pour que la balance ſoit d'un uſage commode, il faut que cette inclinaiſon ne ſoit ni trop petite ni trop grande. Si elle s'inclinoit difficilement, ſon témoignage deviendroit trop incertain; & ſi elle ſe précipitoit tout-à-fait, on n'atteindroit que très-difficilement le terme de l'équilibre.

628. Voyons comment on peut déterminer l'inclinaiſon que doit prendre le fléau, pour une différence quelconque entre les deux poids.

Soient comme ci-devant p & p' les poids des deux baſſins EF & GH & de leurs dépendances; $P + p''$ le poids placé dans le baſſin EF, & P le poids placé dans le baſſin GH.

Concevons que la différence p'' amène le fléau dans la ſituation aCb telle que l'angle décrit par le bras AC ſoit

$= a$. Le point B paſſant en b, & le centre de gravité G du fléau paſſant en m, on aura $BCb = gCm = ACA = a$.

Soit l'angle $ACD = BCD = b$; l'angle $iCg = c$; $AC = l = Ca = Cb$; $Cg = r = Cm$. Menons les horizontales al, mk, bn. Nous aurons $al = l$ ſin. $(b - a)$, $bn = l$ ſin. $(a + b)$, $km = r$ ſin. $(a + c)$. Or puiſque le ſyſtème doit s'arrêter dans la poſition aCb, & que les forces qui agiſſent en a, m & b ſont verticales, on doit avoir $(P + p + p'') \times al = (P + p') \times bn + q \times km$, q marquant le poids du fléau.

Subſtituant donc pour al, bn & km leurs valeurs, on aura $(P + p + p'')\, l$ ſin. $(b - a) = (P + p')\, l$ ſin. $(a + b) + qr$ ſin. $(a + c)$, ou $(P + p + p'')\, l$ (ſin. b coſ. a — ſin. a coſ. b) $= (P + p')\, l$ (ſin. a coſ. b + ſin. b coſ. a) $+ qr$ (ſin. a coſ. c + ſin. c coſ. a); d'où l'on tire $\frac{\text{ſin. } a}{\text{coſ. } a}$ ou tang. $a = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{(P + p + p'')\, l \text{ ſin. } b - (P + p')\, l \text{ ſin. } b - qr \text{ ſin. } c}{(2P + p + p' + p'')\, l \text{ coſ. } b + qr \text{ coſ. } c}.$$

Mais puiſque la balance doit n'avoir aucune inclinaiſon lorſque $p'' = 0$; c'eſt-à-dire, puiſque $a = 0$ lorſque $p'' = 0$, on a auſſi $(P + p)\, l$ ſin. $b = (P + p')\, l$ ſin. $b + qr$ ſin. c. Subſtituant dans le numérateur de la valeur de tang. a, la valeur de qr ſin c que donne cette équation, on aura

$$\text{tang. } a = \frac{p''\, l \text{ ſin. } b}{(2P + p + p' + p'')\, l \text{ coſ. } b + qr \text{ coſ. } c}.$$

629. Si le point de rotation C de la balance eſt en ligne droite avec les deux points A & B; alors ſin. $b = 1$,

&

& cos. $b = 0$. On a donc tang. $a = \frac{p'' l}{q r \text{ cos. } c}$; d'où l'on voit que, toutes choſes d'ailleurs égales, la balance aura d'autant plus de facilité à s'incliner en vertu d'une inégalité p'' entre les deux poids comparés, que la longueur des bras ſera plus grande; & cela eſt général quel que ſoit l'angle b; car la valeur de tang. a peut être miſe ſous cette forme,

$$\text{tang. } a = \frac{p'' \text{ ſin. } b}{(2P + p + p' + p'') \text{ cos. } b + q \text{ cos. } c \frac{r}{l}},$$

où l'on voit que tang. a ſera d'autant plus grande, toutes choſes d'ailleurs égales, que le terme q cos. $c \frac{r}{l}$ ſera plus petit, c'eſt-à-dire, d'autant plus que l ſera plus grand. Ainſi la balance ſera d'autant meilleure que ſes bras ſeront plus longs, pourvu d'ailleurs qu'ils ne fléchiſſent point.

630. Si les trois points A, C, B étant en ligne droite, le point g ſe trouvoit auſſi ſur la même ligne; alors cos. c étant $= 0$, on auroit tang. $a = \frac{p'' \text{ ſin. } b}{0}$, ou tang. a infini. L'angle a ſeroit donc de 90 degrés, c'eſt-à-dire, qu'à la plus petite inégalité la balance ſe renverſeroit tout-à-fait. On doit donc éviter de placer les quatre points A, C, B & g, tous en même-temps ſur une même ligne droite.

631. Mais quoiqu'on doive éviter de placer ces quatre points ſur une même ligne droite, on doit remarquer cependant que la balance prendra en général d'autant plus d'inclinaiſon, lorſqu'il y aura inégalité entre les deux poids, que les points C & g approcheront plus de ſe trouver ſur la même ligne AB; car les angles ACD, & gCD approchant alors d'autant

plus d'être droits, cos. b & cos. c deviennent des fractions d'autant plus petites, & par conséquent tang. a devient d'autant plus grande.

632. Une des principales qualités que la balance doit encore avoir, c'est d'être très-mobile; c'est-à-dire, que si par quelque cause que ce soit, le fléau AB a été dérangé de la position horizontale, il y soit ramené avec la plus grande facilité; voyons de quoi dépend cette qualité.

633. Supposons qu'une force quelconque F ait mis la balance dans la situation aCb (*fig.* 103) & concevons que cette force soit appliquée perpendiculairement en un point quelconque O de l'un AC des deux bras. F sera donc aussi la force avec laquelle la balance tend à revenir, c'est-à-dire, la force avec laquelle le point O tend à tourner autour de C.

Puis donc que par l'hypothèse la force F peut maintenir le système dans la situation aCb, il faut (616) que..... $F \times CO + (P + p) \times al = (P + p') \times bn + q \times mk$.

Substituant dans cette équation, pour al, bn, & km, leurs valeurs trouvées (628) on aura..... $F \times CO + (P + p)\, l \text{ sin. } (b - a) = (P + p')$ sin. $(a + b) + q\, r$ sin. $(a + c)$, ou $F \times CO = (P + p')\, l$ (sin. a cos. b + sin. b cos. a) — $(P + p)$ (l sin. b cos. a — sin. a cos. b) + $q\, r$ (sin. a cos. c + sin. c cos. a).

Mais puisque la balance reste d'elle-même en équilibre dans la position horizontale de la ligne AB, on a..... $(P + p)\, l$ sin. $b = (P + p')\, l$ sin. $b + q\, r$ sin. c. Substituant dans l'équation précédente, la valeur de $q\, r$ sin. c que donne cette dernière, on aura $F \times CO =$..... l sin. a $\left[(2P + p + p') \text{ cos. } b + \frac{q\, r \text{ cos. } c}{l}\right]$.

D'où l'on voit 1° que la balance reviendra avec d'autant plus de force, qu'elle aura été plus écartée.

2°. Qu'elle reviendra avec d'autant plus de force, que ſes bras ſeront plus longs.

3°. Que tant que le point C ſera au-deſſus du point D, la balance reviendra d'autant plus facilement qu'elle ſera plus chargée.

4°. Mais ſi le point C étoit au-deſſous du point D; alors cof. b étant négatif, parce que l'angle ACD ſeroit obtus, la balance n'auroit la faculté de revenir qu'autant que $(2P + p + p')$ cof. b ſeroit plus petit que $\frac{qr}{l}$ cof. c; & que par conſéquent elle ne pourroit être employée que pour de petits poids; deviendroit d'autant plus pareſſeuſe qu'elle ſeroit plus chargée, & enfin pourroit culbuter tout-à-fait en portant la charge.

5°. Si c'eſt, au contraire, le centre de gravité qui ſe trouve au-deſſus du point C; alors cof. c ſera négatif, & la balance ne reviendra qu'autant que $(2P + p + p')$ cof. b ſera plus grand que $\frac{qr \text{ cof. } c}{l}$. Elle pourra donc être renverſée ſous de fort petites charges; reprendra la faculté de revenir ſous des charges un peu plus grandes, & deviendra d'autant plus diligente que la charge ſera plus grande.

Du levier en mouvement ; des centres de percuſſion ; des centres d'oſcillation & du choc excentrique des corps.

634. Soient M, M', M'' (*fig.* 104) des maſſes quelconques ſans peſanteur, & conſidérées comme des points, ſituées dans un même plan avec le point C, liées entr'elles & avec le point C, de manière à ne pouvoir changer leurs diſtances réciproques, & à ne pouvoir que tourner autour de C ou autour d'un axe paſſant par C, perpendiculaire à leur plan.

Suppoſons que ces maſſes reçoivent en même-temps dans leur plan des impulſions ſuivant Mm, $M'm'$, $M''m''$, telles que ſi elles étoient libres, elles euſſent des vîteſſes repréſentées par ces lignes, il s'agit de déterminer le mouvement qu'elles prendront.

Il faut, ſuivant le principe expoſé (287), décompoſer les vîteſſes Mm, $M'm'$, $M''m''$, chacune en deux autres dont l'une ſoit celle qui doit avoir lieu, & dont l'autre ſoit par conſéquent telle que ſi les maſſes M, M', M'' n'euſſent eu que cette vîteſſe, elles fuſſent demeurées en équilibre.

Il eſt clair 1° que les vîteſſes que ces corps peuvent prendre, ne pouvant être que des vîteſſes

de rotation autour de C, doivent être perpendiculaires aux rayons CM, CM', CM''. 2°. Que pour que ces vîteſſes aient lieu, c'eſt-à-dire, ne s'altèrent point mutuellement, il faut qu'elles ſoient proportionnelles aux diſtances CM, CM', CM''.

Cela poſé, je décompoſe les vîteſſes imprimées Mm, $M'm'$, $M''m''$, en vîteſſes Ms, $M's'$, $M''s''$, qui ſoient celles qui peuvent avoir lieu; & en vîteſſes Mq, $M'q'$, $M''q''$, avec leſquelles les maſſes puiſſent ſe faire équilibre autour de C. On aura donc $Ms : M's' :: CM : CM'$; $Ms : M''s'' :: CM : CM''$; & (616) en menant les perpendiculaires Ct, Ct', Ct'' ſur les directions prolongées des vîteſſes Mq, &c. on aura $M \times Mq \times Ct + M' \times M'q' \times Ct' - M'' \times M''q'' \times Ct'' = 0$.

Or par la propriété des parallélogrammes (211), on a $M \times Mq \times Ct + M \times Ms \times CM = M \times Mm \times CT$, en abaiſſant les perpendiculaires CT, CT', CT'' ſur les directions de Mm, $M'm'$, $M''m''$; c'eſt-à-dire, $M \times Mq \times Ct = M \times Mm \times CT - M \times Ms \times CM$. Par la même raiſon, on a $M' \times M'q' \times Ct' = M' \times M'm' \times CT' - M' \times M's' \times CM'$, & $M'' \times M''q'' \times Ct'' = M'' \times M''m'' \times CT'' + M'' \times M''s'' \times CM''$.

Si de ces trois dernières équations on ajoute les deux premières, & qu'on en retranche la dernière; que de plus on faſſe attention à la condition de l'équilibre exprimée par l'équation des momens, donnée ci-deſſus, on aura $0 = M \times Mm \times CT + M' \times M'm' \times CT' - M'' \times M''m'' \times CT'' - M \times Ms \times CM - M' \times M's' \times CM' + M'' \times M''s'' \times CM''$. Mais les proportions établies ci-deſſus, donnent $M's' = \frac{Ms \times CM'}{CM}$, $M''s'' = \frac{Ms \times CM''}{CM}$. Subſtituant ces valeurs, & faiſant les réductions & tranſpoſitions ordinaires, on aura $Ms = \ldots\ldots$ $\frac{M \times Mm \times CT + M' \times M'm' \times CT' - M'' \times M''m'' \times CT''}{M \times (CM)^2 + M' \times (CM')^2 + M'' \times CM''^2} \times CM$. Or le numérateur de cette fraction, qui exprime la ſomme des momens * des forces $M \times Mm$, $M' \times Mm'$, &c. eſt (216) égal au moment de leur réſultante. Donc ſi l'on nomme R cette réſultante, & D ſa diſtance au point C, on aura cette ſomme de momens, $= R \times D$.

De plus, le dénominateur étant la ſomme des produits de chaque maſſe multipliée par le quarré de ſa diſtance au point C; ſi l'on repréſente, en général, l'une quelconque de ces maſſes par m, &

* Toujours en prenant avec des ſignes contraires, les momens des forces qui tendent à faire tourner en ſens contraires.

ſa diſtance au point C, par r; on pourra repréſenter la ſomme de ces produits, par cette expreſſion abrégée, $\int mrr$, ($\int$ déſignant le mot *ſomme*), enſorte que nommant v la vîteſſe Ms, on aura Ms ou $v = \frac{R \times D}{\int mrr} \times CM$.

635. Quoique nous ayons ſuppoſé que toutes les forces & toutes les parties du ſyſtême, fuſſent dans un même plan, il eſt facile de voir que la même choſe auroit encore lieu, quand même elles ſeroient ſeulement dans des plans parallèles entr'eux & perpendiculaires à l'axe de rotation, pourvu que toutes les parties du ſyſtême fuſſent aſſujetties à tourner autour d'une droite ou axe fixe.

636. Et puiſqu'un corps ſolide de figure quelconque, peut toujours être conſidéré comme l'aſſemblage de pluſieurs points ſolides liés entr'eux, on peut donc dire, en général, que

Lorſqu'un corps L *de figure quelconque* (fig. 105 *ſollicité par tant & de telles forces que l'on voudra, ne peut prendre d'autre mouvement qu'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe* AB (*ſitué hors de ce corps ou dans ce corps*); *la vîteſſe de rotation que l'un quelconque de ſes points prendra, ſe trouvera en diviſant la ſomme des momens de toutes ces forces* (*ou le moment de leur réſultante*) *par la ſomme des*

produits de chaque partie de ce corps, multipliée par le quarré de ſa diſtance à l'axe de rotation, & multipliant le quotient par la diſtance du point dont on cherche la vîteſſe, à ce même axe.

637. Soit G le centre de gravité du corps L (*fig.* 106); concevons que tandis que le point quelconque M, en tournant autour de C, décrit pendant un inſtant l'arc infiniment petit Ms, le centre de gravité G décrive l'arc Gg, perpendiculaire à CG; & menons par le point g, la ligne gk parallèle & égale à CG. Au lieu de concevoir que le corps tourne autour de C, on peut concevoir qu'il eſt tranſporté parallèlement à lui-même avec une vîteſſe égale à Gg, & qu'en même-temps ſes parties tournent autour du point mobile G avec une vîteſſe telle qu'en prenant $gk = GC$, le point k décrive l'arc $kC = Gg$; car alors le point C du corps L reſte également immobile. Or le corps étant libre alors, la réſultante de tous les mouvemens de rotation autour du point mobile G eſt nulle (289). Donc la réſultante de tous les mouvemens dont le corps eſt actuellement animé, n'eſt autre que la force qu'auroit le corps L animé de la vîteſſe Gg, c'eſt-à-dire, que cette force doit être perpendiculaire à CGR & $= L \times Gg$, en repréſentant par L, la maſſe du corps. Or puiſque

les parties du corps décrivent des arcs ſemblables, on a $CM : CG :: Ms : Gg$; donc $Gg = \frac{Ms \times CG}{CM}$; donc la force réſultante de tous les mouvemens de rotation autour de C, eſt $\frac{L \times Ms \times CG}{CM}$.

Mais quoique cette réſultante ſoit la même que ſi le corps étant libre, le centre de gravité eût reçu la vîteſſe Gg, néanmoins il eſt facile de voir qu'elle ne paſſe pas par G, mais par quelque point R de CG, plus éloigné de G; puiſque les points les plus éloignés ayant plus de force, la réſultante doit paſſer du même côté que le centre de gravité par rapport à C, & plus loin que ce centre de gravité. Nommons donc D' la diſtance CR, à laquelle paſſe cette réſultante, & nous aurons $\frac{L \times Ms \times CG}{CM} \times D'$ pour ſon moment.

Or ſi à l'inſtant où les forces qui ont fait naître le mouvement du corps, viennent à agir ſur les parties de ce corps, on leur oppoſoit à la diſtance D' une force égale à celle que nous venons de déterminer; c'eſt-à-dire, égale à l'effort total qu'elles produiſent ſur ce corps, il eſt évident qu'il y auroit équilibre; mais dans ce cas le moment $\frac{L \times Ms \times CG \times D'}{CM}$ doit être égal au moment $R \times D$; donc puiſque (634) $R \times D =$

$\frac{Ms}{CM} \int mrr$, on aura $\frac{L \times Ms \times CG \times D'}{CM} = \frac{Ms}{CM} \int mrr$, & par conſéquent $D' = \ldots\ldots \frac{\int mrr}{L \times CG}$.

Il réſulte donc, de ce que nous venons d'expoſer, que

638. *Si tant de forces que l'on voudra, dirigées comme on le voudra, dans les plans auxquels l'axe de rotation ſoit perpendiculaire, agiſſent ſur un corps, & ne peuvent le faire tourner qu'autour de cet axe; 1° la force que ce corps en recevra, ſera égale à la maſſe de ce corps multipliée par la vîteſſe que prendra ſon centre de gravité*, vîteſſe que l'on détermine par ce qui a été dit (290); 2°. *Cette force ſera perpendiculaire au plan qui paſſe par l'axe & par le centre de gravité; 3°. Sa diſtance à l'axe ſera toujours la même, quelques ſoient ſes forces & leurs directions; & elle ſera égale à la ſomme des produits de chaque particule du corps, multipliée par le quarré de ſa diſtance à l'axe; égale, dis-je, à cette ſomme diviſée par la maſſe du corps multipliée par la diſtance du centre de gravité au même axe.*

639. v marquant toujours la vîteſſe avec laquelle un point déterminé M du corps L, tend à tourner en vertu de l'action de tant de forces que l'on

voudra, ou de leur réſultante R; ſi l'on appelle r la diſtance d'une particule quelconque, à l'axe de rotation, & m la maſſe de cette particule; on aura $\frac{rv}{CM}$ pour ſa vîteſſe de rotation, & $\frac{mrv}{CM}$ pour la force qu'elle reçoit, & par conſéquent pour la réſiſtance qu'elle oppoſe à R, par ſon inertie; donc $\frac{mrrv}{CM}$ ſera le moment de cette réſiſtance; donc la ſomme des momens des réſiſtances que les particules de L oppoſent au mouvement de rotation que R leur imprime, eſt $\int\frac{mrrv}{CM}$, ou $\frac{v}{CM}\int mrr$; car ces deux expreſſions ſont les mêmes, puiſque v & CM ne changent point quelle que ſoit la particule m que l'on conſidère.

On voit donc que, toutes choſes d'ailleurs égales, la réſiſtance que les parties d'un corps oppoſent au mouvement de rotation qu'on leur imprime, eſt d'autant plus grande que $\int mrr$ eſt plus grande.

640. Dorénavant, nous appellerons la quantité $\frac{v}{CM}\int mrr$, *le moment d'inertie* du corps; & $\int mrr$, nous l'appellerons l'*expoſant du moment d'inertie.*

641. Nous verrons, dans peu, comment on détermine l'expoſant du moment d'inertie dans un

corps quelconque; mais quand on a déterminé cet expoſant à l'égard d'un axe quelconque, il eſt très-facile d'en conclure ce qu'il doit être à l'égard de tout autre axe parallèle au premier. Nous allons d'abord faire voir comment on peut, pour un axe quelconque, conclure la valeur de ſon expoſant, de celle qu'elle auroit à l'égard d'un autre axe parallèle au premier.

642. Soit donc AB (*fig.* 107) un axe quelconque; $A'B'$, un autre axe qui lui ſoit parallèle, & qui paſſe par le centre de gravité du corps; ſoit m une particule quelconque de ce corps; & par m concevons un plan mCC' perpendiculaire aux deux axes AB, $A'B'$; ayant mené mC, mC', & la ligne mP perpendiculaire ſur CC', les lignes mC, mC' ſeront perpendiculaires ſur AB, $A'B'$.

Cela poſé, ſelon ce qui a été dit (*Alg.* 197) on aura $(mC)^2 = (mC')^2 + (CC')^2 + 2CC' \times C'P$. Donc $\int m \times (mC)^2 = \int m \times (mC')^2 + \int m \times (CC')^2 + \int 2m \times CC' \times C'P$. Or puiſque la diſtance CC' eſt toujours la même quelle que ſoit la particule m que l'on conſidère, $\int m \times (CC')^2$, n'eſt autre choſe que $(CC')^2 \int m$, ou $(CC')^2 \times L$, en nommant L la maſſe du corps. Par la même raiſon,

$\int 2m \times CC' \times C'P$, n'eſt autre choſe que $2CC'\int m \times C'P$; mais $\int m \times C'P$, étant la ſomme des produits des particules par rapport à un plan qui paſſe par $A'B'$, c'eſt-à-dire, par le centre de gravité, doit (234) être $= 0$; on a donc ſimplement $\int m \times (mC)^2 = \int m \times (mC')^2 + L \times (CC')^2$. Donc *connoiſſant l'expoſant* $\int m \times (mC')^2$ *du moment d'inertie à l'égard d'un axe paſſant par le centre de gravité, on aura l'expoſant de ce moment à l'égard de tout autre axe parallèle à celui-là, en ajoutant au premier, le produit de la maſſe par le quarré de la diſtance de ces deux axes.*

643. D'après cela, & l'expreſſion de la vîteſſe de rotation trouvée (634), on voit donc *que de tous les axes autour deſquels on peut faire tourner un corps, en vertu d'une force ou impulſion quelconque, ceux autour deſquels la vîteſſe de rotation ſera la plus grande, ſont ceux qui paſſent par le centre de gravité*, puiſque l'expoſant du moment d'inertie à l'égard d'un axe paſſant par le centre de gravité, eſt plus petit qu'à l'égard de tout autre axe.

644. Tout ce qui précède eſt d'un très-grand uſage, & renferme la méthode pour trouver le *centre de percuſſion*, & le *centre d'oſcillation* des

corps aſſujettis à tourner autour d'un axe déterminé ou d'un point déterminé C (*fig.* 108).

Ce qu'on entend par *centre de percuſſion*, c'eſt le point R de la ligne CG menée par le point fixe C, & le centre de gravité G, par où paſſe la réſultante des mouvemens de rotation de tous les points de L; ce point, ou le centre de percuſſion, eſt donc déterminé par ce qui a été dit (637).

645. A l'égard du centre *d'oſcillation*, c'eſt le point R d'un corps L (*fig.* 108) ou d'un ſyſtême de corps, qui ſe trouve éloigné de C d'une quantité égale à la longueur que devroit avoir un pendule ſimple pour faire ſes oſcillations en même-temps que ce corps ou ce ſyſtême de corps, fait les ſiennes en vertu de la peſanteur. Nous allons voir que ce centre eſt le même que le centre de percuſſion.

En effet, lorſqu'il s'agit de la peſanteur, la force R réſultante de l'action que la peſanteur exerce ſur chaque partie matérielle d'un corps, eſt égale à la maſſe totale multipliée par la vîteſſe que la peſanteur imprime, en un inſtant, à toute partie de matière; c'eſt-à-dire, que $R = g \times L$, en nommant g cette vîteſſe. De plus, cette réſultante R paſſe par le centre de gravité G; & par conſéquent ſa diſtance au point fixe C, ou à l'axe qui paſſe par C, eſt CN; donc (636) la vîteſſe de rotation Ms que prend un point

quelconque M, lorſque le corps eſt abandonné à l'action de ſa peſanteur, eſt $Ms = \frac{g \times L \times CN}{\int mrr} \times CM$; enſorte que pour le centre de gravité G, elle eſt $Gg = \frac{g \times L \times CN}{\int mrr} \times CG$.

Or pour qu'un pendule ſimple qui auroit pour longueur CR, faſſe ſes oſcillations en même-temps que le corps L, il faut qu'en le ſuppoſant éloigné de la verticale, de la même quantité angulaire que l'eſt CR, la vîteſſe que la peſanteur lui communique en R (*fig.* 109) perpendiculairement à CR, ſoit la même que celle du point R (*fig.* 108); c'eſt-à-dire, qu'elle ſoit à la vîteſſe de G, (*fig.* 108) : : CR : CG; or il eſt facile de voir (*fig.* 109) en décompoſant la vîteſſe Rl ou g, que la peſanteur donne dans un inſtant, à un corps libre, en deux autres; l'une Rk ſuivant la verge Cr, l'autre Rr perpendiculaire à CR; il eſt facile de voir que Rl : Rr : : CR : RS : : CG : CN; donc g : Rr : : CG : CN; & par conſéquent $Rr = \frac{g \times CN}{CG}$; il faut donc que $\frac{g \times CN}{CG} : \frac{g \times L \times CN}{\int mrr} \times CG$: : CR : CG; d'où l'on tire $CR = \frac{\int mrr}{L \times CG}$; c'eſt-à-dire, la même valeur que pour le centre de percuſſion (644).

646. Puiſque toutes les forces qui agiſſent ſur le corps L, ou ſur un ſyſtême de corps aſſujetti

à tourner autour d'un point ou d'un axe fixe, ſont naître dans ce corps une vîteſſe telle qu'un point quelconque M tourne avec une vîteſſe $Ms = \frac{R \times D}{\int mrr} \times CM$; & qu'il eſt d'ailleurs évident que ſi le corps venoit à tourner en ſens contraire avec la même vîteſſe, il feroit équilibre à toutes ces forces; concluons-en que ſi un corps tournant avec une vîteſſe qui, pour un point déterminé M, ſoit v, on veut arrêter ce mouvement avec une puiſſance R dont la direction paſſe à une diſtance de $C = D$, il faudra que cette puiſſance ou ſa diſtance D ſoit telle que le moment $R \times D$, ſoit égal à la vîteſſe du point M, diviſée par la diſtance CM, & multipliée par la ſomme des produits des particules par les quarrés de leurs diſtances à C ou à l'axe qui paſſe par C. En effet, cette puiſſance doit être telle qu'elle puiſſe reproduire la même vîteſſe dans le corps L ſuppoſé en repos; or cette vîteſſe ſeroit $v = \frac{R \times D}{\int mrr} \times CM$, qui donne $R \times D = \frac{v}{CM} \int mrr$.

647. Si un corps L de figure quelconque (*fig.* 110) aſſujetti de manière à ne pouvoir tourner qu'autour du point fixe C, ou d'un axe paſſant par ce point qui peut d'ailleurs être par-tout où l'on voudra; ſi ce corps, dis-je, vient à être choqué perpendiculairement à ſa ſurface

ſurface, par un corps N; on pourra, par les principes précédens, déterminer le mouvement de l'un & de l'autre après le choc, de la manière ſuivante.

Soit V la vîteſſe de N, ſuivant la perpendiculaire TS, avant le choc; v ſa vîteſſe après le choc; $V - v$ ſera la vîteſſe, & $N(V-v)$ la quantité de mouvement qu'il perdra par le choc, & qui paſſera dans L. Cette quantité de mouvement fera donc naître dans L une vîteſſe de rotation (636) telle que le point T, par exemple, tournera avec une vîteſſe $v' = \frac{N(V-v)\times CS}{\int mrr} \times CT$, (en menant CS perpendiculaire ſur TS.

Concevons que l'arc infiniment petit Tm décrit du centre C, repréſente cette vîteſſe; en formant ſur la tangente TA, & ſur la perpendiculaire TS, le parallélogramme $TAmr$, on verra en ſubſtituant, par la penſée, les vîteſſes TA & Tr, à la vîteſſe Tm, que la vîteſſe TA ne peut nuire en rien à la vîteſſe v que N doit prendre; mais que la vîteſſe Tr nuiroit à la vîteſſe v, ſi elle étoit plus petite que v; donc, puiſqu'on ſuppoſe que v eſt réellement la vîteſſe que M conſervera, il faut que Tr ſoit $= v$. Or les triangles ſemblables CST, Trm, donnent $CT : CS :: Tm$ ou $v' : Tr$; donc $\frac{v'\times CS}{CT} = Tr = v$, & par conſéquent $v' = \frac{v\times CT}{CS}$. Subſtituant donc pour v' cette valeur dans l'équation ci-deſſus, on aura . . . . . et $\frac{v\times CT}{CS} = \frac{N\times(V-v)\times CS}{\int mrr} \times CT$; d'où l'on tire $v = \frac{N\times V\times (CS)^2}{\int mrr + N\times(CS)^2}$; de-là il eſt facile de conclure la vîteſſe de rotation v'. Mais l'équation $v' = \frac{v\times CT}{CS}$,

donnant $v : v' :: CS : CT$, fait voir que v eſt la vîteſſe de rotation du point S; on voit donc que le point S tourne avec la vîteſſe qui reſte à N après le choc.

648. On voit donc que pour avoir les mouvemens des corps qui tournent, il faut ſavoir déterminer la valeur de $\int mrr$. C'eſt ce qui ſera toujours facile, ainſi qu'on va le voir, ſi la nature du corps peut être exprimée par des équations. Et ſi cette condition n'a pas lieu, on pourra toujours, du moins, partager le corps en parties, comme parallélipipèdes ou pyramides, &c. dont la nature peut être exprimée par des équations; & en cherchant pour chacune la valeur de $\int mrr$, on ajoutera enſuite toutes ces ſommes pour avoir la valeur totale de $\int mrr$ pour le corps entier ou le ſyſtême de corps dont il s'agit. Voyons donc comment on doit s'y prendre pour trouver dans les corps dont la nature peut être exprimée par des équations, la valeur de $\int mrr$.

649. Soit AB (*fig.* 111) l'axe de rotation; & concevons par AB, deux plans perpendiculaires entre eux. Soit m une particule quelconque du corps, & ayant mené mC perpendiculaire ſur AB, menons mS perpendiculaire au plan AR. Si l'on tire CS, elle ſera perpendiculaire à AB, & par conſéquent au plan PQ. Le triangle rectangle mSC donnera

$(Cm)^2 = (CS)^2 + (mS)^2$; donc $\int m \times (Cm)^2$ ou $\int m\,r\,r = \int m \times (CS)^2 + \int m \times (mS)^2$. La queſtion revient donc à trouver la ſomme des produits des particules par les quarrés de leurs diſtances à deux plans qui paſſent par l'axe de rotation, & ſont perpendiculaires entr'eux. Or dès qu'on aura trouvé l'expreſſion algébrique de cette ſomme, par rapport à l'un des plans, il ſera aiſé de l'avoir par rapport à l'autre; voyons donc comment on peut, en général, trouver la ſomme des produits des particules d'un corps, par les quarrés de leurs diſtances à un plan connu.

650. On concevra ce corps partagé en tranches infiniment minces, parallèles à ce plan; & ſuppoſant que $D\,d$ (*fig.* 112) repréſente l'épaiſſeur d'une de ces tranches, on nommera x la diſtance $C\,D$ au plan dont il s'agit, & S la ſurface de la tranche; alors, comme tous les points de cette ſurface ſont éloignés du plan $P\,Q$ d'une quantité égale à x, on aura $x\,x\,S\,dx$ pour les produits de tous les points de cette tranche par les quarrés de leurs diſtances à ce plan, & par conſéquent $\int x\,x\,S\,dx$ pour la ſomme totale de ces produits pour tout le corps.

Si l'on nomme pareillement x', les diſtances

auplan perpendiculaire à PQ & paſſant par l'axe de rotation AB : & que concevant le corps partagé en tranches parallèles à ce nouveau plan, on appelle S' la ſurface de l'une des tranches, on aura de même $\int x'^2 S' dx'$ pour la ſomme des produits des particules, par le quarré de leur diſtance à ce ſecond plan; enſorte que $\int x^2 S dx + \int x'^2 S' dx'$ ſera la valeur de la ſomme des produits de chaque partie du corps multipliée par le quarré de ſa diſtance à l'axe AB.

651. Pour en donner quelques exemples, ſuppoſons que le corps eſt un parellélipipède rectangle (*fig.* 113) tournant au tour de l'axe AB perpendiculaire à l'axe de ce parallélipipède & au milieu du côté RS.

Par la nature de ce corps, la ſurface S eſt conſtante; ainſi l'intégrale $\int x^2 S dx$ eſt $\frac{x^3 S}{3}$, qui lorſque x eſt égal à la hauteur ME ou h du parallélipipède, devient $\frac{h^3 S}{3}$.

On voit de même que S' eſt une quantité conſtante, & qu'ainſi $\int x'^2 S' dx'$, devient $\frac{x'^3 S'}{3}$ qui lorſque $x' = \frac{1}{2} MN$, ou $\frac{1}{2} h'$, en nommant MN, h', devient $\frac{1}{8} \times \frac{h'^3 S'}{3}$; & comme le plan qui paſſe par l'axe diviſe le corps en deux parties égales, on aura pour les deux moitiés $\frac{1}{4} \times \frac{h'^3 S'}{3}$; donc la ſomme totale des produits ſera $\frac{h^3 S}{3} + \frac{h'^3 S'}{12}$.

652. Si l'on veut donc trouver le centre d'oſcillation ou de percuſſion, il ne s'agit plus (644) que de diviſer cette quantité, par la maſſe du parallélipipède multipliée par la diſtance de ſon centre de gravité; c'eſt-à-dire, par $hh'b \times \frac{1}{2}h$, en nommant RM, b. On aura donc $\frac{2h^3S}{3h^2h'b} + \frac{h'^3S'}{6h^2h'b}$; ou à cauſe que $S = h'b$, & $S' = hb$, on aura $\frac{2h}{3} + \frac{h'^2}{6h}$ pour la diſtance du centre d'oſcillation & pour celle du centre de percuſſion.

Si h' eſt très-petit par rapport à h, on aura cette diſtance $= \frac{2h}{3}$. Donc *le centre d'oſcillation, & le centre de percuſſion d'une ligne droite, ou d'un parallélogramme tournant autour d'un de ſes côtés comme axe, eſt aux $\frac{2}{3}$ de la diſtance au point ou à l'axe de rotation.*

653. Imaginons que la verge ou barre peſante CA (*fig.* 114) tombe en tournant autour de ſon extrémité fixe C; & que ſous cette ligne on ait placé un obſtacle T. Pour ſavoir avec quelle force cet obſtacle ſera frappé, on ſe rappellera (436) que le centre de gravité B tombant par l'arc BG acquiert en G la même vîteſſe que s'il étoit tombé librement par la verticale BD; ainſi en nommant u cette vîteſſe qui eſt facile à déterminer (176), & M la maſſe de la verge, Mu (637) ſera la quantité de mouvement ou la force de la verge; & cette force (644) ſera celle avec laquelle l'obſtacle T ſera frappé s'il eſt placé au centre de percuſſion P; c'eſt-à-dire à la diſtance $CP = \frac{2}{3}CA$.

Mais s'il eſt placé en tout autre point O; on concevra

cette force Mu, qui eſt perpendiculaire à CA, décompoſée en deux forces qui lui ſoient parallèles, & dont l'une paſſe par C, & l'autre par O; alors (205) la force qui paſſe par O ſera $\frac{CP \times Mu}{CO}$.

Si l'obſtacle T eſt mobile, il y aura toujours un point ſoit ſur la ligne CA même, ſoit ſur ſon prolongement, où l'obſtacle étant placé recevra de la part de la barre, la plus grande vîteſſe poſſible; c'eſt-à-dire plus de vîteſſe que s'il eût été frappé par tout autre point de la barre.

654. Nous allons voir comment ont détermine ce point; mais auparavant nous devons faire remarquer la différence que l'on doit mettre entre le levier en mouvement & le levier en équilibre.

Si le levier peſant étoit porté ſur les deux appuis C & O; pour déterminer ce que chaque appui ſupporte, il faudroit décompoſer le poids de ce levier ſuppoſé concentré au centre de gravité G, en deux forces dont l'une paſsât par C, & l'autre par O; & l'on trouveroit (205) que l'effort ſoutenu par C eſt $\frac{P \times GO}{CO}$, & que l'effort ſoutenu par O eſt $\frac{P \times CG}{CO}$, P étant le poids du levier. Mais ſi le levier eſt en mouvement autour du point C; alors l'effort total ne paſſe plus par G, mais (644) par le centre de percuſſion P; en ſorte que les efforts qui en réſultent ſur les deux points C & O ſont (205) réciproquement proportionnels aux diſtances CP & PO.

655. Suppoſons que la verge CA (*fig.* 115) tournant

autour de C avec une vîteſſe qui, pour le point A, ſoit u, rencontre perpendiculairement le corps libre M', éloigné du centre de rotation C d'une quantité connue BC; on demande quelle vîteſſe M' en recevra.

Concevons que par le choc, la vîteſſe u' ſe change en v, & que le corps M' reçoive la vîteſſe v'.

Il faut donc (287) que ſi la verge ne tournant qu'avec une vîteſſe qui pour le point A ſeroit $u - v$, eut rencontré le corps M' venant au-devant d'elle avec la vîteſſe v', il y eut eu équilibre.

Soit r la diſtance d'un point quelconque de la verge CA dont je ſuppoſe la longueur $CA = a$. Nous aurons $\frac{r(u-v)}{a}$ pour la vîteſſe avec laquelle un point quelconque de la verge tourne, lorſque le point A tourne avec la vîteſſe $u - v$. Donc ſi m eſt la maſſe de ce point, $\frac{mr(u-v)}{a}$ ſera la quantité de mouvement, ou ſa force; & $\frac{mrr(u-v)}{a}$ ſera le moment de cette force. Or à cauſe de l'équilibre, il faut (616) que la ſomme des momens des forces perdues par chacun des points de la verge, ſoit égale au moment de la force qu'acquiert le corps M'; donc en nommant b la diſtance CB, on aura $\int \frac{mrr(u-v)}{a} = M'bv'$.

Mais pour que v' ſoit en effet la vîteſſe de M' après le choc, il faut que v' ſoit égale à la vîteſſe avec laquelle le point B de la verge doit tourner après le choc; car perdant un inſtant après le choc, le point B & le corps M ſont

mûs perpendiculairement à CA. Or la viteſſe de B après le choc, eſt $\frac{bv}{a}$; on a donc $v' = \frac{bv}{a}$; donc $\int \frac{mrr}{a}(u-v) = \frac{M'bbv}{a}$, ou..... $(u-v)\int \frac{mrr}{a} = \frac{M'bbv}{a}$; d'où l'on tire $v = \frac{u\int mrr}{M'bb+\int mrr}$ pour la viteſſe de rotation de la verge après le choc.

Quant à la viteſſe v' du corps M' puiſqu'on a $v' = \frac{bv}{a}$, on aura $v' = \frac{\frac{bu}{a}\int mrr}{M'bb+\int mrr}$.

656. Soit p la diſtance du centre de percuſſion de la verge; g celle de ſon centre de gravité à l'égard du point C; & M la maſſe de la verge. Puiſque (638) on a $p = \frac{\int mrr}{gM}$, on aura $\int mrr = pgM$, & par conſéquent $v = \frac{pgMu}{M'bb+pgM}$ & $v' = \frac{pgbMu}{a(M'bb+pgM)}$.

657. Cette valeur de v' fait voir que ſi l'on veut frapper le corps M' le plus fortement qu'il eſt poſſible, il n'eſt point du tout indifférent à quel point B on le placera. En effet ſi on ſuppoſe $b = 0$; c'eſt-à-dire, ſi on plaçoit le corps M' au point C, on auroit $v' = 0$; c'eſt-à-dire, qu'il ne recevroit point de mouvement, & cela eſt évident. Mais ſi on donne conſécutivement à b des valeurs qui aillent en augmentant, v ne croîtra que juſqu'à un certain terme, paſſé lequel il dimi-

nuera; car ſi on augmente b juſqu'à le rendre infini, en imaginant que CB ſoit prolongé à l'infini, mais ſans augmentation de maſſe; alors la valeur de v' ſe réduit à $v' = \frac{pgbMu}{M'bb}$ ou $v' = \frac{pgMu}{M'b}$ qui eſt infiniment petite, ou zéro. Il y a donc, en effet, une valeur de b qui peut rendre v' la plus grande qu'il eſt poſſible.

Pour la déterminer, il ne s'agit que d'égaler à zéro, la différencielle de la valeur de v' priſe en regardant b ſeule comme variable. Par ce procédé, on trouvera $bb = \frac{pgM}{M'}$, & $b = \sqrt{(\frac{pgM}{M'})}$.

Soit D le point où le poids du corps M' agiſſant de bas en haut à l'aide de la poulie I, mettroit le poids de la verge CA en équilibré, à l'aide de l'appui C; on aura $CD : CG :: M : M'$, ou (en nommant CD, k) $k : g :: M : M'$ & $\frac{gM}{M'} = k$; donc $b = \sqrt{(pk)}$. Donc.....

Si un corps CA (fig. 115) *tournant autour d'un point fixe C, choque un autre corps* M'; *celui-ci recevra la plus grande quantité de mouvement poſſible, lorſque ſa diſtance* CB, *au point de rotation, ſera moyenne proportionnelle entre la diſtance du centre de percuſſion du choquant & la diſtance à laquelle le choqué, par ſon poids, ſeroit équilibre au poids du choquant.*

658. Si CA eſt une verge ou barre de groſſeur uniforme, & dont le diamètre ſoit fort petit en comparaiſon de ſa longueur, on aura $p = \frac{1}{3}a$, & $g = \frac{1}{2}a$. Donc $b = \sqrt{\frac{1}{3}}\frac{a^2 M}{M'}$

$= a\sqrt{(\frac{M}{3M'})}$. Donc ſi le corps choqué pèſe le tiers de la barre, le point de la plus grande percuſſion ſera à l'extrémité A de la barre. Il ſera entre C & A, ſi $3M'$ eſt plus grand que M, & au-delà de A par rapport à C, ſi M eſt plus grand que $3M'$.

659. Si on ſubſtitue dans la valeur de v' la valeur de b, ſavoir $b = \sqrt{(\frac{pgM}{M'})}$, on aua $v' = \frac{u}{2a}\sqrt{(\frac{pgM}{M'})}$.

660. On peut réſoudre la queſtion précédente d'une manière un peu plus ſimple, que nous placerons ici d'autant plus volontiers, qu'elle peut être utile dans pluſieurs rencontres.

Puiſque le point A doit, par le choc, changer ſa vîteſſe de rotation u, en une vîteſſe v, c'eſt-à-dire, doit perdre la vîteſſe $u - v$, le centre de gravité b perd donc la vîteſſe $\frac{g}{a}(u - v)$, & la verge (638) perd la quantité de mouvement, ou la force $\frac{Mg}{a}(u - v)$. Or cette force doit (638) paſſer par le centre de percuſſion, c'eſt-à-dire, à la diſtance p du point C, en conſervant les mêmes dénominations que ci-deſſus. Donc puiſqu'il doit y avoir équilibre entre cette force & la quantité de mouvement $M'v'$ gagnée par le corps M', il faut (607) que $\frac{Mgp}{a}(u - v) = M'bv'$, ou à cauſe que $v' = \frac{bv}{a}$ il faut que $\frac{Mgp}{a}(u - v) = \frac{M'bbv}{a}$; d'où l'on tire $v = \frac{gpMu}{M'bb + gpM}$, & $v' = \frac{gpbMu}{a(M'bb + gpM)}$ comme ci-deſſus (656).

661. Prenons la ſphère pour ſecond exemple de la manière de calculer $\int m\,r\,r$.

La ſurface que nous avons appelée S, eſt un cercle qui a pour rayon IM (*fig. 116*) que je nomme y. Ainſi ſuppoſant que $1 : c$ eſt le rapport du rayon à la circonférence, on aura $\frac{cy^2}{2} = S$. Soit $DI = \xi$, & r le rayon de la ſphère; on a $y^2 = 2r\xi - \xi\xi$, & par conſéquent $S = \frac{c}{2}(2r\xi - \xi\xi)$. Soit $DC = a$, on aura CI ou $x = \xi + a$, & $dx = d\xi$; donc $\int x^2\,S\,dx$ devient $\int(\xi + a)^2 \times \frac{c}{2}$ $(2r\xi - \xi\xi)\,d\xi$, ou en développant tout, devient $\int \frac{c}{2}$ $(2aar\xi d\xi + 4ar\xi^2 d\xi - aa\xi^2 d\xi + 2r\xi^3 d\xi - 2a\xi^3$ $d\xi - \xi^4 d\xi)$; & en intégrant, on a $\frac{c}{2}(aar\xi^2 + \frac{4}{3}ar\xi^3$ $- \frac{1}{3}aa\xi^3 + \frac{1}{5}r\xi^4 - \frac{1}{4}a\xi^4 - \frac{2}{5}\xi^5)$ qui lorſque $\xi = 2r$, ſe réduit à $\frac{c}{2}(\frac{4}{3}a^2r^3 + \frac{8}{5}ar4 + \frac{8}{15}r^4$.

Pour trouver la valeur de $\int x'x'\,S'dx'$, il n'eſt pas néceſſaire de recommencer le calcul; parce que la figure régulière de la ſphère, fait qu'il ſeroit abſolument ſemblable; il n'y a autre choſe à faire qu'à ſuppoſer que a qui exprime la diſtance du plan PQ, à la ſurface, devient $-r$, c'eſt-à dire, que ce plan paſſe par le centre, en l'imaginant d'ailleurs perpendiculaire à ſa première poſition; & on aura $\frac{c}{2}$ $(\frac{4}{3}r^5 - \frac{8}{5}r^5 + \frac{8}{5}r^5)$ qui ſe réduit à $\frac{c}{2} \times \frac{4}{15}r^5$. Réuniſſant donc les deux intégrales, on a $\frac{c}{2}(\frac{4}{3}a^2r^3 + \frac{8}{5}ar4 +$ $\frac{32}{15}r^5)$.

Et puiſque la ſolidité de la ſphère eſt $\frac{c}{2} \times \frac{4}{3}r^3$, &

que la distance de son centre de gravité au plan PQ, est $a + r$, divisant le résultat qu'on vient de trouver, par le produit de ces deux dernières quantités, on aura pour la distance CO du centre d'oscillation & de percussion,

$$CO = \frac{a^2 + 2ar + \frac{7}{5}r^2}{a+r} = \frac{a^2 + 2ar + r^2 + \frac{2}{5}r^2}{a+r} =$$

$$= a + r + \frac{2}{5} \times \frac{r^2}{a+r} = CG + \frac{2}{5} \cdot \times \frac{(DG)^2}{CG},$$

d'où l'on voit que le centre d'oscillation & de percussion est plus bas que le centre même de la sphère, & qu'on ne peut les prendre pour celui-ci, que lorsque le rayon de la sphère est très-petit à l'égard de la distance du centre G au point de suspension.

662. Si la sphère est suspendue par une verge ou lame, & qu'on veuille avoir égard à la masse de cette lame, on se rappellera que nous avons trouvé (651), $\frac{h^2 S}{3} + \frac{h'^2 S}{12}$ pour la somme des produits des particules de cette lame par les quarrés de leurs distances au point fixe ou à l'axe. Or h est ce que nous représentons ici par a; de plus S étant (651) $= h' b$, & $S' = hb = ab$, on aura $\frac{a^2 h' b}{3} + \frac{h'^2 ab}{12}$; cette quantité & celle qui appartient à la sphère, doivent être multipliées par les pesanteurs spécifiques de ces deux corps, si ces pesanteures sont différentes; alors ajoutant les deux produits, on aura en appellant p & p' les pesanteurs spécifiques de la lame & de la sphère, on aura, dis-je, $p \times \frac{a^2 hb}{3} + p \times \frac{h'^2 ab}{12} + p' \times \frac{c}{2} \times (\frac{8}{5} a^2 r^2 + \frac{8}{5} a r^4 + \frac{28}{15} r^5)$, pour la somme des produits des particules de tout le système, par le quarré

de leurs distances à l'axe. Divisant cette quantité par la somme $pah'b + p'\frac{c}{2} \times \frac{4}{3}r'$, on aura la distance du centre d'oscillation.

663. Dans la pratique on peut se contenter de partager le corps en un grand nombre de parties, & de multiplier chacune par le quarré de sa distance à l'axe, pour avoir d'une manière suffisamment exacte la valeur de $\int mrr$.

664. Après cette petite digression sur la manière de trouver $\int mrr$, revenons aux applications qu'on peut faire de la règle donnée (636).

Nous avons démontré (289) que lorsqu'un corps quelconque L (*fig.* 117) reçoit une impression suivant une direction qui ne passe pas par son centre de gravité G, cette impression se transmet entièrement au centre de gravité qui se meut parallèlement à la direction RS, suivant laquelle le corps a reçu cette impression ; & qu'en même temps les parties de ce corps tournent autour du centre de gravité de la même maniere qu'elles le feroient, si le point G étoit fixe. Donc si la figure de ce corps, & les forces qui lui sont transmises (dont je suppose que R représente la résultante) sont telles qu'il ne puisse tourner qu'autour d'un seul axe ; comme cet axe passera nécessai-

rement par le centre de gravité, tout ce que nous avons dit ci-deſſus aura également lieu, en entendant par r, dans $\int mrr$, la diſtance d'une particule quelconque à l'axe qui paſſe par le centre de gravité, & par $R \times D$ le moment de la force R pris par rapport au même axe, ou la ſomme des momens de toutes les forces qui agiſſent ſur le corps, priſe par rapport à ce même axe. C'eſt à-dire, que le centre de gravité ſera mû parallèlement à la direction de la force R, avec une vîteſſe $= \frac{R}{L}$, L étant la maſſe du corps. Et ſi l'on mène GS perpendiculaire ſur RS, & qu'on appelle v la vîteſſe de rotation de S, on aura $v = \frac{R \times GS}{\int mrr} \times GS$, ou $v = \frac{R \times GS^2}{\int mrr}$ (636). Voyons-en quelques applications.

655. Suppoſons que le corps N (*fig.* 118) vient choquer le corps L ſuivant une direction quelconque CQ, telle cependant, qu'il n'en réſulte de rotation dans L qu'autour d'un ſeul axe perpendiculaire au plan qui paſſe par le centre de gravité G, & par la perpendiculaire TS, au point de contact T; il s'agit de déterminer les vîteſſes après le choc, & leurs directions; le corps L eſt ſuppoſé en repos.

Concevons par le point de contact T, un plan tangent; & imaginons la vîteſſe de N, ſuivant CQ, décompoſée en deux autres, l'une ſuivant CT perpendiculaire à ce plan, l'autre ſuivant CI parallèle à ce même plan. Si N n'avoit

d'autre vîteſſe que CI, il ne feroit que toucher I en paſſant, & ne lui communiqueroit aucun mouvement, du moins abſtraction faite du frottement. Ce n'eſt donc qu'en vertu de la vîteſſe CT que ſe fait le choc. Or comme il eſt aiſé, dans le parallélogramme $CTAI$ dont tous les angles & la diagonale CA ſont ſuppoſés connus, de connoître CT, nous regarderons cette vîteſſe CT comme connue, & nous la nommerons V. Soit v la vîteſſe qui reſtera à N après le choc, ſuivant la même direction CT ou CS; & par conſéquent $V-v$ la vîteſſe qu'il perd; $N\times(V-v)$ eſt donc la force qui paſſe dans le corps L, celle que nous avons nommée R. Donc le centre de gravité, & toutes les parties du corps, prendront ſuivant GM parallèle à CS, une vîteſſe $=\frac{N\times(V-v)}{L}=v'$, en nommant v' cette vîteſſe.

Mais comme la force $N\times(V-v)$ ne paſſe pas par le centre de gravité G de L, ce corps doit tourner autour de G comme ſi ce point eût été fixe (289). Soit u la vîteſſe de rotation que prendra le point S qui eſt celui où la perpendiculaire GS ſur CS, rencontre cette dernière ligne; on aura donc (636)..... $u=\frac{N(V-v)\times(GS)^2}{fmrr}$, ou, en repréſentant GS par D, $u=\frac{ND^2(V-v)}{fmrr}$.

Obſervons de plus, que pour que le corps N, ait réellement la vîteſſe v, il faut que le point T du corps L, ait auſſi cette même vîteſſe v ſuivant TS; voyons donc avec quelle vîteſſe ce point doit avancer ſuivant TS.

Il aura d'abord la vîteſſe v' commune à toutes les parties

de L. De plus, ſi l'on ſuppoſe que l'arc infiniment petit Tm perpendiculaire à GT repréſente la vîteſſe de rotation du point T, en imaginant le parallélogramme $Trmn$ ſur les directions Tm, TA & TS, on aura Tr pour la vîteſſe de T ſuivant TS en vertu de ſa rotation. Or les triangles ſemblables Tmr, GTS, donnent $GT : GS :: Tm : Tr$; donc $Tr = \frac{GS \times Tm}{GT}$. Mais puiſque u eſt la vîteſſe de rotation du point S, on a $u : Tm :: GS : GT$, & par conſéquent $Tm = \frac{u \times GT}{GS}$; donc $Tr = \frac{GS}{GT} \times \frac{u \times GT}{GS} = u$; donc la vîteſſe totale du point T du corps L, ſuivant CS, eſt $v' + u$; il faut donc que $v' + u = v$.

Si des trois équations que nous venons de trouver, pour exprimer les conditions du mouvement, on tire les valeurs de v, u & v', on aura $v = \frac{N(\int mrr + LD^2)V}{(N+L)\int mrr + LD^2N}$, $v' = \frac{NV\int mrr}{(N+L)\int mrr + LD^2N}$, $u = \frac{LND^2V}{(N+L)\int mrr + LD^2N}$.

Si la diſtance GS ou $D = 0$; c'eſt-à-dire, ſi le choc paſſe par le centre de gravité G, alors la vîteſſe de rotation $u = 0$; les vîteſſes v & v' ſont égales entr'elles & à $\frac{NV}{N+L}$, ainſi que cela doit être (352).

La vîteſſe v étant déterminée, ſi on la compoſe avec la vîteſſe CI qui n'a ſouffert aucune altération, on aura la vîteſſe abſolue de N, & ſa direction après le choc.

666. Si le corps L étoit en mouvement avant le choc, alors on décompoſeroit la vîteſſe de N avant le choc, en deux autres, dont l'une fût égale & parallèle à celle de L; elle ne contribueroit en rien au choc; on emploiera donc la ſeconde, comme on a employé la

la vîteſſe ſuivant CQ, en conſidérant le corps L comme en repos.

667. Si l'on compare la valeur que nous venons de trouver pour u, avec celle que nous avons trouvée (647) pour la vîteſſe de rotation, en faiſant attention à la différence de ſignification de r, dans chaque cas, on pourra connoître la différence entre la vîteſſe de rotation que prend un corps libre, & celle qu'il prend quand il eſt aſſujetti à tourner autour d'un point ou axe déterminé.

668. Lorſqu'un corps L de figure quelconque (*fig.* 119) ayant reçu une impulſion ſuivant une direction RS qui ne paſſe pas par le centre de gravité, prend les deux mouvemens dont nous avons parlé (664); il eſt facile de voir que, pendant un inſtant, on peut le conſidérer comme n'ayant qu'un ſeul mouvement, ſavoir, un mouvement de rotation autour d'un point ou axe fixe C, qui, ſelon la figure du corps, & ſelon ſa diſtance GS à laquelle paſſe la force impulſive, peut être dans le corps même, ou dehors. En effet, ſi tandis que la ligne GS ſe tranſporte parallèlement à elle-même de GS en $G'S'$, on imagine qu'elle tourne autour du point mobile G; comme les points du corps ont des vîteſſes de rotation d'autant plus grandes qu'ils ſont plus éloignés de G, il eſt facile de voir qu'il y aura ſur SG un point C qui ſe

trouvera avoir décrit de C' vers C, un arc égal à GG', arc que pendant un inſtant, on peut regarder comme une ligne droite; & alors ce point C aura autant rétrogradé par ſon mouvement de rotation, qu'il s'étoit avancé parallèlement à GG' par la vîteſſe commune à toutes les parties; ce point aura donc toujours reſté en C que l'on pourra par cette raiſon conſidérer, pendant un inſtant, comme un point fixe autour duquel le corps tourneroit.

Si l'on veut connoître la poſition du point C, on remarquera que les arcs CC', $S'I$ que les points C' & S' décrivent, dans un inſtant, peuvent être regardés comme des lignes droites perpendiculaires à GS, ou parallèles à GG'; or les triangles ſemblables $CC'G'$, $G'S'I$ donnent $G'S' : G'C' :: S'I : CC'$, ou $GS : GC :: S'I : GG'$; or nous avons trouvé la vîteſſe $GG' = \frac{R}{L}$, & la vîteſſe $S'I = \frac{R \times D^2}{fmrr}$; donc GS ou $D : GC :: \frac{R \times D^2}{fmrr} : \frac{L}{R}$, d'où l'on tire $GC = \frac{fmrr}{D \times L}$.

669. Le point C eſt ce qu'on appelle le *Centre ſpontané de rotation*, parce que c'eſt un centre que le corps prend comme de lui-même. Ce point

eſt préciſément le centre d'oſcillation qu'auroit le corps L, s'il tournoit autour d'un point ou axe fixe placé en S; car de $CG = \frac{\int mrr}{D \times L}$, on conclud $CS = GS + \frac{\int mrr}{D \times L} = \frac{L \times GS \times D + \int mrr}{D \times L}$ $= \frac{L \times (GS)^2 + \int mrr}{GS \times L}$; or $L \times (GS)^2 + \int mrr$, eſt (641) préciſément ce que (637) on entendoit par $\int mrr$; donc le point C eſt ici le même que le point R conſidéré (637).

670. On voit donc que le point autour duquel un corps peut être cenſé tourner pendant un inſtant, eſt indépendant de la valeur de la force ou des forces qu'on applique à ce corps; &, en général, on voit par la valeur de CG, que ce point eſt d'autant plus loin, que cette force, ou la réſultante de toutes ces forces, agit plus près du centre de gravité.

671. Nous avons vu (644) que lorſqu'un corps tourne autour d'un point ou axe fixe, ſon centre de percuſſion eſt le même que ſon centre d'oſcillation; ces deux centres ſe trouvent donc alors par la même opération. Il n'en eſt pas de même quand le corps eſt libre. En effet, ſuppoſons qu'un corps dont la maſſe eſt L, tourne avec une vîteſſe qui, pour un point ſitué à une diſtance connue a,

ſoit v ; & qu'en même-temps, le centre de gravité de ce corps ſoit mu avec la vîteſſe u. Il eſt clair d'abord que la force réſultante de tous les mouvemens qui animent les différentes parties de ce corps, aura pour valeur $L \times u$, ou Lu, c'eſt-à-dire, la même que ſi le corps ne tournoit pas (289). En ſecond lieu, la diſtance à laquelle cette réſultante doit paſſer à l'égard du centre de gravité, eſt évidemment celle à laquelle une force égale à Lu, feroit naître dans le mobile, la même vîteſſe de rotation qu'il a actuellement ; or (636) cette vîteſſe v a pour expreſſion $\frac{Lu \times D \times a}{fmrr}$, en appelant D la diſtance cherchée ; on a donc $v = \frac{LuDa}{fmrr}$, & par conſéquent $D = \frac{v}{u} \times \frac{fmrr}{La}$; d'où l'on voit que la diſtance du centre de percuſſion d'un corps libre dépend du rapport de la vîteſſe de rotation à la vîteſſe du centre de gravité ; qu'en particulier, elle eſt nulle quand la vîteſſe de rotation eſt nulle, ce qui doit être en effet.

On peut donc par-là, déterminer en quel point on peut arrêter un corps libre qui ſe meut en tournant ſur lui-même.

Du Tour ou *Treuil*, *Cabeſtan*, *&c.*

672. Le *Tour* ou *Treuil* eſt, en général, une

roue (*fig.* 120) traverſée perpendiculairement par un cylindre dont les extrémités portent ſur deux appuis *C*, *C*. Une puiſſance *Q* appliquée ſuivant une direction tangente à la circonférence de la roue, entraîne cette circonférence avec le cylindre qui eſt ſolidement lié avec elle, & obligeant l'un & l'autre de tourner autour de l'axe de ce cylindre, ſur les appuis *C*, *C*, enveloppe ſucceſſivement les différentes parties de la corde *DP*, à laquelle eſt attaché le poids *P* que l'on ſe propoſe d'élever ou d'attirer vers ce cylindre.

673. Quelquefois au lieu d'une roue, on ſe contente d'implanter dans le corps du cylindre & perpendiculairement à ſon axe, des *barres E*, *E*; (*fig.* 120 & 122) auxquelles la puiſſance s'applique, & produit le méme effet. D'autres fois, les extrémités du cylindre ſont terminées par deux manivelles *Q*, *Q* (*fig.* 121) auxquelles on applique la force ou les forces motrices.

674. Lorſque l'axe du cylindre eſt vertical; (*fig.* 122) on lui donne le nom de *Cabeſtan*. C'eſt dans cette ſituation qu'on l'emploie pour traîner des fardeaux ou remonter des bateaux.

675. Mais, en général, quelle que ſoit la diſpoſition de cette machine, on voit que l'action de la puiſſance & celle du poids ou de l'obſtacle qu'il

s'agit de ſurmonter, ne s'exercent pas dans un même plan, mais dans des plans parallèles, ou à très-peu près parallèles. L'action de la puiſſance produit deux effets, dont l'un s'exerce contre le poids même, & l'autre contre les appuis; voyons comment s'engendrent ces deux effets, dans le cas de l'équilibre.

676. Réduiſons toute la machine repréſentée par la *figure* 120, à ce que l'on voit (*fig.* 123); c'eſt à-dire, réduiſons le cylindre à ſon axe *CC*; repréſentons par *AMN*, le plan de la roue, & par *BDL*, la ſection du cylindre par un plan parallèle à *AMN*, & paſſant par le cordon *DP*.

Ayant mené le rayon *EA*, au point *A* où la puiſſance agit ſur la roue, concevons par *CC* & par *EA*, un plan *CEA* qui rencontre *BDL* ſuivant *IB* qui ſera néceſſairement parallèle à *AE*. Ayant mené *AB*, concevons par cette ligne, & par la direction *AQ* de la puiſſance, un plan *QAR* qui rencontrera l'axe *CC* en quelque point *R*. Enfin par les points *B* & *R*, menons *BF* & *RG* parallèles à *AQ*.

Cela poſé, nous pouvons (208) décompoſer la force Q, en deux autres forces *F* & *G*, dirigées ſuivant *BF* & *RG*; & comme cette dernière paſſe par l'axe même du cylindre, elle ne peut produire

aucun mouvement de rotation autour de cet axe, & par conſéquent ne peut contribuer à ſoutenir le poids P; elle ſera toute conſumée contre les appuis.

Il n'y a donc que la force F qui puiſſe faire équilibre au poids P. Or 1° cette force eſt dirigée dans le même plan BDL dans lequel s'exerce l'action de ce poids. 2°. Les deux lignes BF & BI étant parallèles aux deux droites AQ, AE qui font un angle droit, BF eſt donc perpendiculaire à BI, ou tangente à la circonférence BDL. On peut donc regarder BID comme un levier angulaire dont le point d'appui eſt en I; & puiſque les diſtances BI, ID des directions des deux puiſſances F & P, à ce point d'appui ſont égales, ces deux puiſſances doivent être égales; on a donc $F = P$; voyons donc quel eſt le rapport de F à Q.

Selon ce qui a été dit (205), on a $Q : F :: BR : AR$; mais les triangles ſemblables RBI, RAE, donnent $BR : AR :: BI : AE$; donc $Q : F :: BI : AE$, ou (puiſque $F = P$) $Q : P :: BI : AE$; c'eſt-à-dire, que *dans le treuil, la puiſſance eſt au poids comme le rayon du cylindre eſt au rayon de la roue.*

677. Si le poids P étoit attaché en un point B (*fig.* 124) du plan de la roue, tel que la per-

pendiculaire IB ſur ſa direction fût égale au rayon du cylindre, on pourroit regarder AIB comme un levier angulaire dont le point d'appui ſeroit au centre I; & il faudroit, pour l'équilibre (601), que l'on eût $Q : P :: BI : AI$; c'eſt-à-dire, qu'on auroit entre la puiſſance & le poids le même rapport que ci-devant. Donc *l'action de la puiſſance ſe tranſmet au poids, à l'aide du treuil, comme ſi le poids & la puiſſance étoient dans un même plan.*

678. A l'égard de la charge de chacun des appuis, il n'en eſt pas de même; elle varie ſelon la diſtance du plan BLD (*fig.* 123) au plan de la roue.

Pour la déterminer on décompoſera la puiſſance Q (conſidérée comme appliquée en E parallèlement à AQ) en deux forces parallèles à AQ, & qui paſſent par C & C (208). On décompoſera, pareillement, le poids P conſidéré comme appliqué verticalement en I, en deux forces parallèles à PD, & qui paſſent par C & C. Par ce moyen, chaque appui ſera ſollicité par deux forces dont les valeurs & les directions ſeront connues. Il ſera donc facile, pour chaque appui, de réduire ces forces à une ſeule dont la valeur & la direction ſoient connues.

Cette méthode de trouver la charge des deux appuis, eſt fondée ſur ce que les deux forces F,

& P ſe réduiſent à une ſeule qui agit en I; ſi l'on conçoit celle-ci décompoſée en deux forces parallèles à F & P, & appliquées en I, elles n'auront pas d'autres valeurs que F & P. Donc 1° on peut regarder P comme appliqué en I; 2° la force F conſidérée comme appliquée en I & la force G appliquée en R ne peuvent manquer d'avoir pour réſultante une force égale à Q, puiſque $G = F - Q$, ainſi qu'il réſulte de la décompoſition ci-deſſus; de plus, cette réſultante $= Q$ paſſe par E, puiſque $RI : RE :: RB : RA :: Q : F$ (205).

679. Si la puiſſance, au lieu d'être appliquée ſuivant une direction tangente à la roue, agiſſoit par le moyen des bras E, E (*fig.* 120 & 122) & perpendiculairement à leur longueur, le rapport de la puiſſance au poids ſeroit toujours le même que ci-devant, en ſubſtituant aux mots *rayon de la roue*, ceux de *longueur du bras*, cette longueur étant comptée depuis l'axe du cylindre. Mais ſi la puiſſance n'agiſſoit pas perpendiculairement au bras IE (*fig.* 122); au lieu de ce bras on prendroit la perpendiculaire IR menée ſur la direction de la puiſſance; enſorte que la puiſſance ſeroit au poids, comme le rayon du cylindre eſt à IR.

680. Puiſque (*fig.* 123) $Q : P :: IB : AE$,

on a donc $Q \times AE = P \times IB$; c'eſt-à-dire, que le moment de la puiſſance eſt égal au moment du poids, ces momens étant pris par rapport à l'axe CC. Et ſi l'on emploie, en même-temps, pluſieurs puiſſances appliquées à différens bras; il faudra que la ſomme des momens de ces puiſſances, ſoit égale au moment du poids.

681. Si la corde qui porte le poids, ou qui tranſmet à l'obſtacle, l'action de la puiſſance, au lieu de s'envelopper ſur un cylindre, s'enveloppe ſur une ſurface conique, ou, en général, ſur celle d'un ſolide dont les diamètres varient, le rapport de la puiſſance au poids variera auſſi continuellement; & réciproquement ſi la puiſſance dont l'action doit ſe communiquer à l'aide d'une machine ſemblable à celle dont il s'agit ici, varie continuellement, & doit néanmoins produire conſtamment le même effet, on doit, pour y parvenir, faire enſorte que ſon action ſoit appliquée à des rayons d'autant plus longs, qu'elle diminuera davantage. C'eſt ce que l'on voit particulièrement dans les montres ou horloges à reſſort, où la force motrice eſt un reſſort fixé par une de ſes extrémités à l'arbre du tambour ou barillet Z (*fig.* 125), & qui après pluſieurs circonvolutions, eſt fixé intérieurement à la ſurface concave de ce barillet. Une chaîne attachée d'une part ſur la ſurface convexe du barillet, fait pluſieurs tours ſur la fuſée Y à laquelle elle eſt fixée par ſon autre extrémité; par le développement du reſſort, le barillet en tournant tire la chaîne & fait tourner la fuſée Y; mais comme le reſſort, à meſure qu'il ſe débande, diminue de force, on compenſe cette diminution en donnant à la fuſée plus de diamètre dans les parties qui doivent être développées les dernières; par ce moyen

le rouage reçoit de la part du reſſort, des impulſions égales e temps égaux.

682. Il paroît donc, à ne conſidérer les choſes que du côté de l'équilibre, qu'on peut diminuer à volonté, le rapport de la puiſſance au poids, & mettre un poids, ſi petit qu'il ſoit, en état de vaincre tel poids qu'on voudra, à l'aide du tour & des machines qui s'y rapportent. Mais quand on conſidère le mouvement, & qu'on a égard, comme on le doit, à la nature des agens qu'on emploie, l'effet ne peut pas être augmenté arbitrairement; le rapport du rayon du cylindre, au rayon de la roue, n'eſt point arbitraire; il y en a un propre à donner le plus grand effet poſſible.

Suppoſons, par exemple, que le moteur appliqué au bras E (*fig.* 122) tende à ſe mouvoir avec une vîteſſe V, & que la force dont il eſt capable ſoit MV, c'eſt-à-dire, équivalente à celle d'une maſſe connue M animée de cette vîteſſe V. Soit v la vîteſſe avec laquelle ſera mû le point E, en vertu de la réſiſtance de P. Alors ſi l'on nomme R le bras IE, & r le rayon du cylindre, on aura la vîteſſe que prendra P, par cette proportion, $R : r :: v : \frac{rv}{R}$, puiſqu'il eſt évident que le point E, & le point où la corde touche le cylindre, ont des vîteſſes proportionnelles à leurs diſtances à l'axe. Il faut donc (287) concevoir au moment où la puiſſance vient à agir, que la vîteſſe V eſt compoſée de la vîteſſe v qui ſubſiſtera, & de la vîteſſe $V - v$ qui ſera détruite.

Et qu'au même inſtant le poids P a la vîteſſe $\frac{rv}{R}$ qui aura lieu, & la vîteſſe $\frac{rv}{R}$ en ſens contraire, & qui ſera détruite. C'eſt-à-dire, que la force motrice réduite à la force $M(V-v)$ doit faire équilibre à la maſſe P animée de la force $\frac{Prv}{R}$. Donc (676) $M(V-v) \times R = \frac{Prrv}{R}$; d'où l'on tire $v = \frac{MVRR}{MRR+Prr}$. Donc la vîteſſe du poids P, qui eſt $\frac{rv}{R}$, ſera $\frac{MVrR}{MRR+Prr}$. Donc pour ſavoir quel rapport il doit y avoir entre R & r, pour que le poids P prenne la plus grande vîteſſe poſſible, il faut (36) égaler à zéro la différencielle de cette valeur, priſe en regardant r ſeule comme variable. On aura donc $MVRdr(MRR+Prr) - MVRr \times 2Prdr = 0$; d'où l'on tire $MRR = Prr$, & $r = R\sqrt{\frac{M}{P}}$. Par exemple, ſi $M : P :: 100000 : 1000$, on aura $r = R\sqrt{(\frac{1000}{100000})} = r \times \frac{1}{10}$; c'eſt-à-dire, que le rayon du cylindre doit être la dixième partie du bras IE, pour que l'effet ſoit le plus grand qu'il eſt poſſible. Que l'on augmente, ou que l'on diminue le bras IE, ou le rayon du cylindre, il n'y a qu'à perdre.

683. Suppoſons que le poids Q (*fig.* 126) appliqué à la circonférence de la roue, entraîne par ſa peſanteur, le poids P appliqué à la circonférence du cylindre, on peut ſur ce mouvement, ſe propoſer les deux queſtions ſuivantes.....

1°. *La hauteur à laquelle* P *doit être élevé, étant donnée, trouver le rapport que* R *doit avoir à* r, *pour que* P *parvienne à cette hauteur, dans le moindre temps poſſible.*

2°. *L'eſpace que* Q *doit décrire, étant donné, trouver le rapport de* R *à* r *pour que* P *arrive à la plus grande hauteur poſſible dans le moindre temps poſſible.*

Soit p la vîteſſe que la peſanteur donne en une ſeconde de temps, à un corps libre; $p\,dt$ ſera celle qu'elle lui donne dans l'inſtant dt.

Soit v la vîteſſe avec laquelle Q eſt mû au bout du temps quelconque t. $\frac{rv}{R}$ ſera celle avec laquelle P ſera mû. Donc ſi ces corps devenoient libres, on auroit $v + p\,dt$ pour la vîteſſe de Q pendant l'inſtant ſuivant, & $\frac{Rv}{R} - p\,dt$ pour celle de P. Mais comme ils ne ſont pas libres, ſuppoſons que la vîteſſe de Q ſoit $v + dv$; celle de P ſera $\frac{r}{R}(v + dv)$ ou $\frac{rv}{R} + \frac{r\,dv}{R}$. Q aura donc perdu par l'action de P, la vîteſſe $p\,dt - dv$, & P aura gagné par l'action de Q, la vîteſſe $\frac{r\,dv}{R} + p\,dt$. Il faut donc (287 & 676) que $QR(p\,dt - dv) = Pr(\frac{r\,dv}{R} + p\,dt)$; d'où l'on tire $dv = \frac{QR^2 - PRr}{QR^2 + Pr^2}\,p\,dt$.

Soit z l'eſpace que Q aura décrit au bout d'un temps quelconque t; on aura $dz = v\,dt$, ou $v = \frac{dz}{dt}$, & $dv = d(\frac{dz}{dt})$; donc $d(\frac{dz}{dt}) = \frac{QR^2 - PRr}{QR^2 + Pr^2} \times p\,dt$;

ou en multipliant par $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dz}{dt}d(\frac{dz}{dt}) = \frac{QR^2 - PRr}{QR^2 + Pr^2} p\,dz$; & en intégrant, $\frac{1}{2}\frac{dz^2}{dt^2} = \frac{QR^2 - PRr}{QR^2 + Pr^2} pz$, équation à laquelle je n'ajoute point de conſtante, parce que $\frac{dz}{dt}$, ou la vîteſſe, eſt zéro dans cette équation, lorſque $z = 0$, ainſi que cela doit être.

De cette équation on tire $dt = \frac{dz}{\sqrt{2pz}} \sqrt{(\frac{QR^2 + Pr^2}{QR^2 + PRr})}$; & en intégrant, $t = \sqrt{\frac{2z}{p}} \times \sqrt{(\frac{QR^2 + Pr^2}{QR^2 - PRr})}$, & par conſéquent $\frac{z}{t} = \sqrt{\frac{pz}{2}} \times \sqrt{(\frac{QR^2 - PRr}{QR^2 + Pr^2})}$.

Soit h la hauteur à laquelle on veut que P ſoit élevé, on aura $\frac{rz}{R} = h$, & par conſéquent $z = \frac{Rh}{r}$, & $\frac{z}{t} = \frac{Rh}{rt} = \sqrt{(\frac{pRh}{2r})} \sqrt{(\frac{QR^2 - PRr}{QR^2 + Pr^2})}$, ou $\frac{h}{t} = \sqrt{p}\,\frac{h}{2} \sqrt{(\frac{QRr - Pr^2}{QR^2 + Pr^2})}$.

Donc 1° ſi la hauteur h eſt donnée, & que l'on demande que P parvienne à cette hauteur dans le moindre temps poſſible; c'eſt demander que h reſtant le même, $\frac{h}{t}$ ſoit un *maximum*. Il faut donc que la différencielle de $\sqrt{\frac{h}{2}} \sqrt{(\frac{QRr - Pr^2}{QR^2 + Pr^2})}$ priſe en regardant h comme conſtante, & $\frac{r}{R}$ comme variable, ou ſeulement r comme variable ſoit $= 0$. Cette condition donnera l'équation $Q^2R^2 - 2PQR^2r - PQRr^2 = 0$, ou $QR^2 - 2PRr - Pr^2 = 0$; d'où il eſt facile de conclure le rapport de R à r.

2°. Si c'eſt z qui eſt donné, & que l'on demande que Q, décrivant l'eſpace z, P ſoit élevé le plus haut qu'il ſe peut dans le moindre temps poſſible; alors il faut que $\frac{h}{t}$ ſoit un *maximum*, z étant conſtant. Il faut donc, en mettant pour h ſa valeur $\frac{rz}{R}$ dans $\sqrt{\frac{ph}{2}}$, que $\sqrt{(\frac{prz}{2R})} \times \sqrt{(\frac{QRr - Pr^2}{QR^2 + Pr^2})}$, ou que $\sqrt{(\frac{pz}{2})} \times \sqrt{(\frac{Qr^2R - PRr^2}{QR^2 + PRr^2})}$ ſoit un *maximum* en ſuppoſant z conſtant. Il faut donc que $d(\frac{Qr^2R - Pr^3}{QR^3 + PRr^2}) = 0$, la différenciation étant faite en regardant r ſeule comme variable. Cette opération donne $2Q^2R^3 - 3PQR^2r - P^2r^3 = 0$, d'où l'on déduira le rapport de R à r.

684. Dans la queſtion que nous avons traitée (682), nous n'avons pas eu égard à la quantité de matière de la roue ou des barres & du cylindre. Mais comme il peut arriver ſouvent qu'elle ſoit aſſez conſidérable pour partager ſenſiblement l'action de la puiſſance, on doit y avoir égard pour être pleinement en état de juger ſi la machine aura ſon effet, ſi la puiſſance donnera la vîteſſe néceſſaire. Or c'eſt ce qu'il eſt facile de faire par ce que nous avons dit (636).

Il faut, pour cet effet, conſidérer la maſſe P, (*fig.* 122), celle des barres ou de la roue lorſqu'il y en a une, & celle du cylindre comme ne faiſant qu'un ſeul corps aſſujetti à tourner autour d'un axe fixe qui eſt ici l'axe du cy-

lindre, la masse P étant considérée comme appliquée à la surface de ce cylindre. Alors si l'on nomme $\int m r' r'$ la somme des produits des particules de la roue & du cylindre, par les quarrés de leurs distances à l'axe, on aura.....

$v = \frac{MVRR}{MRR + Prr + \int mr'r'}$ qui ne revient à la valeur trouvée (636) que lorsque $\int m r' r'$ est assez petite à l'égard de $MRR + Prr$, pour pouvoir être négligée.

685. Dans tout ce qui précède, nous n'avons pas eu égard à la grosseur des cordes. Mais si elles ont un diamètre un peu considérable, alors on doit prendre pour le rayon de la roue & pour celui du cylindre, leur rayon véritable augmenté du rayon ou demi-diamètre de la corde, parce qu'on doit regarder l'action comme se transmettant suivant l'axe de la corde.

686. Il y a une infinité de machines qui peuvent, soit en tout, soit en partie, être rapportées au treuil, & par conséquent au levier; tels sont le *cric* (*fig.* 127), la *chèvre* (*fig.* 128), les *roues dentées* (*fig.* 129), &c. & toutes les machines destinées à percer ou pousser en tournant, quoique ces dernières participent souvent d'une autre machine que nous examinerons dans peu, savoir, le plan incliné.

Dans le cric (*fig.* 127) l'axe sur lequel est chaussée ou auquel est liée la manivelle CRQ, porte un pignon P dont les ailes ou dents engrènent dans une barre dentée AB. L'aile K du pignon soulève, en tournant, la barre AB, à l'aide de la dent contiguë, avec une force

force qui (676) eſt à la force Q appliquée à la manivelle, comme le rayon de la manivelle eſt à celui du pignon; en ſorte que comme le rayon du pignon eſt fort petit à l'égard de celui de cette manivelle, on peut, à l'aide de cette machine, ſoulever des poids aſſez conſidérables, avec une force médiocre.

Quant à la chèvre, nous l'examinerons plus particulièrement dans la ſuite, en parlant du frottement ſur les poulies & ſur le tour.

687. Les roues dentées ſervent à pluſieurs uſages; tantôt on les emploie pour multiplier la force, tantôt pour multiplier la vîteſſe, d'autres fois pour changer la direction des mouvemens; ſouvent pour régler les mouvemens ſur certaines périodes de temps, ou pour rendre ſenſibles des mouvemens ou des eſpaces que l'œil ne pourroit ſaiſir.

Si pluſieurs roues dentées V, X, Y, Z (*fig.* 129) communiquent les unes aux autres par les pignons u, x, y, z, voici comment on peut trouver le rapport de la puiſſance Q appliquée à la première de ces roues, au poids ou à l'effort P que le dernier pignon peut ſoutenir.

Soient R, R', R'', R''' les rayons de ces roues, r, r', r'', r''' ceux de leurs pignons. On conſidérera l'effort que l'aîle d'un pignon quelconque fait ſur la dent de la roue voiſine, comme une puiſſance appliquée à celle-ci; alors, ſelon ce qui a été dit

(676); en nommant E, E' E'' ces efforts, on aura $Q : E :: r : R$, $E : E' :: r' : R'$, $E' : E'' :: r'' : R''$, $E'' : P :: r''' : R'''$, d'où en multipliant par ordre, on conclura $Q : P :: rr'r''r''' : RR'R''R'''$; c'eſt-à-dire, que la puiſſance eſt au poids, comme le produit des rayons de tous les pignons eſt au produit des rayons de toutes les roues; par exemple, ſi le rayon de chaque pignon eſt dix fois plus petit que celui de ſa roue, une puiſſance d'une livre ſoutiendra un effort de 10000 liv.

Au reſte, ce qu'on gagne du côté de la force, en employant les rouages, on le perd du côté de la vîteſſe. En effet, lorſque la roue V a fait un tour, le pignon u qui a fait auſſi un tour, n'a encore fait paſſer qu'autant de dents de la roue X, qu'il a d'ailes, en ſorte que ſi la roue X a quarante-huit dents, & le pignon u, ſix ailes, la roue X n'a fait qu'un huitième de tour lorſque la roue V en a fait un; on voit, par la même raiſon, que la roue Y va plus lentement que X, & ainſi de ſuite.

688. Voyons maintenant comment on peut augmenter la vîteſſe, dans un rapport donné, à l'aide des roues dentées.

Soit (*fig.* 130) une roue dentée V qui engrène dans un pignon u; il eſt clair que pendant un tour de la roue V le pignon u fera autant de tours que

le nombre de ſes ailes eſt contenu de fois dans le nombre des dents de la roue V; c'eſt-à-dire, que pendant un tour de la roue V, le pignon u fera un nombre de tours exprimé par $\frac{N}{n}$, N & n marquant les nombres de dents & d'ailes de la roue & du pignon qu'elle mène.

Donc ſi la tige du pignon u porte une roue X qui engrène auſſi dans un pignon x, on verra de même, que pendant un tour de la roue X ou du pignon u, le pignon x fera un nombre de tours exprimé par $\frac{N'}{n'}$, N' & n' marquant les nombres de dents & d'ailes de la roue X & du pignon x. Donc pendant que la roue X fera un nombre de tours exprimé par $\frac{N}{n}$, c'eſt à-dire, pendant que la roue V fera un tour, le pignon x fera un nombre de tours exprimé par $\frac{N'}{n'} \times \frac{N}{n}$ ou $\frac{NN'}{nn'}$. Et en continuant de raiſonner de même ſur un plus grand nombre de roues & de pignons, on voit que le nombre des tours que fera le dernier pignon pendant un tour de la première roue, eſt exprimé par une fraction qui a pour numérateur le produit des nombres des dents de toutes les roues, & pour dénominateur le produit des nombres des ailes de tous les pignons.

Donc, lorſqu'on demande quels doivent être les nombres des dents & des ailes, d'un nombre de roues & de pignons propoſés, pour que la vîteſſe de la dernière pièce, ſoit à celle de la première, dans un rapport donné; c'eſt une queſtion indéterminée, ou qui peut avoir pluſieurs ſolutions; deux exemples ſuffiront pour voir comment on doit ſe conduire dans ces ſortes de queſtions.

Suppoſons que l'on demande, combien on doit donner de dents aux deux roues V & X, & d'ailes aux pignons u & $\varkappa$, pour que le pignon $\varkappa$ faſſe 50 tours pendant un tour de la roue V. On aura donc $\frac{NN'}{nn'} = 50$. Nous ne connoiſſons donc ici que le quotient de NN' diviſé par nn'; mais nous ne connoiſſons ni le dividende ni le diviſeur. Prenons donc arbitrairement, pour le diviſeur nn', un nombre compoſé de deux facteurs qui ne ſoient ni trop petits ni trop grands pour pouvoir être les nombres d'ailes qu'on peut donner à des pignons. Suppſons, par exemple, $nn' = 7 \times 8 = 56$. Nous pourrons ſuppoſer $n = 7$, & $n' = 8$. Alors nous aurons $\frac{NN'}{56} = 50$, ou $NN' = 50 \times 56$; or 50 & 56 n'excédant pas le nombre des dents qu'on peut donner à chaque roue, je ſuppoſerai $N = 50$, & j'aurai par conſéquent $N = 56$. Si ces deux facteurs ou l'un d'eux, eût été trop grand, je les aurois décompoſés en tous leurs facteurs premiers, & j'aurois examiné ſi de la combinaiſon de ces facteurs il n'en ſeroit pas réſulté deux facteurs plus petits, ou bien j'aurois pris un autre nombre pour nn'.

Suppoſons, pour ſecond exemple, qu'on demande les

nombres de dents de trois roues, & des ailes de trois pignons, pour que le dernier pignon faiſant un tour en 12 heures, la première roue faſſe un tour en un an.

L'année commune étant de 525949 minutes; & les 12 heures valant 720 minutes, il eſt clair que pendant un tour de la première roue, le dernier pignon fait un nombre de tours exprimé par $\frac{525949}{720}$; on a donc $\frac{NN'N''}{nn'n''} = \frac{525949}{720}$. Prenons arbitrairement $n = 7$, $n' = 8$. Nous aurons $\frac{NN'N''}{7 \times 8\, n''} = \frac{525949}{720}$, ou $NN'N'' = \frac{525949}{720} \times 7 \times 8\, n'' = \frac{3681643\, n''}{90}$. Or comme il faut que $NN'N''$ ſoit un nombre entier, il eſt clair que pour réſoudre exactement la queſtion, il faudroit prendre pour n'' un multiple de 90; ce qui étant un nombre trop grand pour être celui des ailes d'un pignon, il faut voir ſi en retranchant ou en ajoutant un petit nombre d'unités, au numérateur de cette dernière fraction, elle ne pourroit pas devenir un nombre entier; comme ce nombre différeroit peu de la valeur véritable de $NN'N''$, on le prendroit pour ce produit.

Soit donc q le plus petit nombre d'unités dont il faille diminuer le numérateur, & ſoit t le nombre entier qui en réſulte, & que l'on prendra pour $NN'N''$; on aura donc $\frac{3681643\, n'' - q}{90} = t$, ou $40907\, n'' + \frac{13\, n'' - q}{90} = t$. Il faut donc que $\frac{13\, n'' - q}{90}$ ſoit un nombre entier; je l'appelle s. J'ai donc $\frac{13\, n'' - q}{90} = s$, ou $n'' =$

$\frac{90s+q}{13} = 6s + \frac{12s+q}{13}$. Je fais $\frac{12s+q}{13} = r$ & j'ai $s = \frac{13r-q}{12} = r + \frac{r-q}{12}$. Enfin, je fais $\frac{r-q}{12} = k$; & j'ai $r = 12k + q$. Donc $s = 13k + q$, & $n'' = 90k + 7q$ Or comme il faut que n'' ſoit petit, je ſuppoſe $k = 0$, & donnant à q la plus petite valeur poſſible en entier, je ſuppoſe $q = 1$. J'ai donc $n' = 7$, & s, ou $NN'N'' = 286350$. Reſte à ſavoir, maintenant, ſi ce nombre peut être décompoſé en trois facteurs qu'on puiſſe prendre pour les nombres des dents N, N', N''; or c'eſt ce qui a lieu, parce que les trois facteurs de ce nombre ſont 50, 69, 83 qui ne ſont pas trop grands pour cet objet. On peut donc prendre, & diſpoſer comme on le voudra, trois roues de 50, 69 & 83 dents, & trois pignons de 7, 7 & 8 ailes.

Si le nombre qu'on trouve ainſi, pour $NN'N''$, ne donnoit point de facteurs convenables, pour être les nombres de dents qu'on peut tailler commodément ſur des roues, on recommenceroit l'opération en donnant d'autres valeurs à q, ou à n, ou à n'.

Quoique la ſolution qu'on obtient en négligeant ainſi quelques unités, ne ſoit qu'approchée, elle eſt cependant ſuffiſamment exacte. Car dans le cas préſent, le nombre de tours du dernier pignon, pendant un tour de la première roue étant $\frac{NN'N''}{nn'n''} = \frac{286350}{7\times7\times8}$; ſi on multiplie cette quantité par 12 heures, durée de chaque tour, on aura pour

la durée de la révolution de la première roue, $365^j\ 5^h\ 48'\ 58''\ \frac{32}{45}$; or nous avons supposé l'année de $365^j\ 5^h\ 49'$.

De l'Equilibre sur les plans.

689. Si un corps P (*fig.* 131) de figure quelconque, qui touche un plan XZ en un point quelconque C, est sollicité par une force unique; il ne peut demeurer immobile sur ce plan qu'à ces deux conditions; 1°. que la direction AD de la force unique qui le sollicite, sera perpendiculaire au plan XZ; 2°. que cette direction passera par le point C, où ce corps touche le plan.

La nécessité de la première de ces deux conditions est évidente. Quant à la seconde, il est facile de voir qu'elle n'est pas moins nécessaire, puisque si la direction AD du corps P', par exemple, quoique perpendiculaire au plan, ne passoit pas par le point d'attouchement C, la résistance du plan qui ne peut s'exercer que suivant la perpendiculaire au point C, ne seroit point directement opposée à la force AD, & ne pourroit par conséquent la détruire, même quand on la supposeroit égale à cette force.

690. Si le corps au lieu de ne toucher le plan que par un seul point, le touche par plusieurs points

ou par une ſurface plane (*fig.* 132 & 133), alors il n'eſt pas indiſpenſable que la force unique AD qui agit ſur lui, paſſe par quelqu'un de ces points; mais il faut qu'elle ſoit perpendiculaire au plan, & qu'elle puiſſe être décompoſée ſeulement en autant de forces perpendiculaires au plan, qu'il y a de points qui repoſent ſur ce plan, & qui paſſent par ces points. En ſorte, par exemple, que ſi le corps P (*fig.* 132) touchoit par deux points C & C', & que la force AD ne ſe trouvât pas dans le plan qui paſſeroit par les perpendiculaires élevées aux points C & C', l'équilibre ne ſeroit pas poſſible, parce que la force AD, ne pourroit être décompoſée en forces qui paſſent par C & C', ſans qu'il en naquît une troiſième qui ne ſeroit point ſoutenue.

En un mot, il faut que la force unique qui agit ſur le corps, ſoit perpendiculaire au plan, & paſſe entre quelques-uns des points par leſquels le corps repoſe.

C'eſt ainſi qu'un homme qui ſe tient debout & droit, demeure en équilibre, quoique la direction de ſa peſanteur ne paſſe pas alors par ſes pieds; mais elle paſſe entre ſes pieds; & cette force ſe décompoſe en deux autres forces qui lui ſont parallèles, & dont chacune paſſant par chaque pied, y eſt détruite.

691. Donc ſi un corps qui touche un plan en

un ou plusieurs points, est sollicité par plusieurs forces dirigées comme on le voudra; il faut 1°. que ces forces puissent être réduites à une seule qui soit perpendiculaire à ce plan; 2°. que celle-ci, dans le cas où elle ne passe pas par un des points d'attouchement, ne les laisse pas tous d'un même côté.

692. Si la force unique qui sollicite le corps, est la pesanteur, il faudra donc que le plan soit horizontal; & si la verticale menée par son centre de gravité, ne rencontre pas l'un des points touchans, il faudra du moins, qu'elle ne laisse pas tous ces points d'un même côté.

693. Donc si le corps n'est sollicité que par deux forces, il faudra 1°. que ces deux forces soient dans un même plan; 2°. que ce plan soit perpendiculaire à celui sur lequel le corps appuie; 3°. que la résultante qui doit toujours être pependiculaire à ce dernier plan, ne laisse pas tous les points de contact, d'un même côté.

Et si de ces deux forces, l'une est la pesanteur, il faudra de plus, qu'elles soient toutes deux dans un plan vertical, & qui passe par le centre de gravité du corps.

694. Voyons maintenant quel rapport il doit y avoir, en général, entre deux forces qui tiennent un corps en équilibre sur un plan.

Soient CQ, CP (*fig.* 134) les directions de ces deux forces; concevons que AB ſoit l'interſection du plan de ces deux forces avec celui ſur lequel le corps appuie; & ayant mené la perpendiculaire CH ſur AB imaginons ſur cette ligne comme diagonale, & ſur les directions CQ, CP, comme côtés, le parallèlogramme $CEDF$. Pour que la réſultante des deux forces Q & P ſoit dirigée ſuivant CD ou CH, il faut (191) que les deux forces Q & P ſoient entr'elles, comme CF eſt à CE; & alors les deux forces Q & P, & la preſſion qu'elles exercent ſur le plan, & que je repréſente par H, ſeront telles qu'on aura $Q : P : H :: CF : CE : CD$.

695. Selon ce qui a été dit (201) on aura également $Q : P : H :: \text{ſin. } ECD : \text{ſin. } FCD : \text{ſin. } ECF$.

696. De deux points A & B pris arbitrairement ſur AB, menons AG & BG perpendiculaires ſur les directions des deux forces Q & P. Le triangle ABG, aura ſes côtés perpendiculaires ſur ceux du triangle CDE, & lui ſera par conſéquent ſemblable (*Géom.* 111). On aura donc $AG : BG : AB :: DE$ ou $CF : CE : CD$; c'eſt-à-dire, (694) $:: Q : P : H$; donc $AG : BG : AB :: Q : P : H$.

697. Mais (*Géom.* 305) $AG : BG : AB :: \text{sin. } ABG : \text{sin. } BAG : \text{sin. } AGB$; donc $Q : P : H :: \text{sin. } ABG : \text{sin. } BAG : \text{sin. } AGB$. C'eſt-à-dire, que lorſque deux forces ſeulement, agiſſent ſur un corps pour le tenir en équilibre ſur un plan; ſi l'on conçoit deux autres plans auxquels ces deux forces ſoient perpendiculaires, ces deux forces & la preſſion ſur le plan principal, ſont repréſentées, chacune, par le ſinus de l'angle compris entre les plans auxquels les deux autres forces ſont perpendiculaires.

698. Puiſque les rapports que nous venons d'établir, ont lieu de quelque nature que ſoient les deux forces P & Q, ils ont donc encore lieu, lorſque l'une des deux, la force P, par exemple, eſt la peſanteur; alors le plan BG eſt horizontal.

699. Soit prolongée la direction de la puiſſance Q (*fig.* 134) juſqu'à ce qu'elle rencontre le plan BA, au point I.

Puiſqu'on a $Q : P : H :: \text{sin. } ABG : \text{sin. } BAG : \text{sin. } AGB$, on a donc $Q : P :: \text{sin. } ABG : \text{sin. } AG$; mais $\text{sin. } BAG = \text{sin. } KAI = \text{cof. } KIA$, puiſque GK eſt perpendiculaire ſur la direction de la puiſſance; donc $Q : P :: \text{sin. } ABG : \text{cof. } KIA$ Or ABG eſt l'inclinaiſon du plan AB à l'horizon, & KIA eſt l'inclinaiſon de la puiſſance à l'égard

du plan AB; donc *dans l'équilibre ſur le plan incliné, la puiſſance eſt au poids, comme le ſinus de l'inclinaiſon du plan à l'horizon, eſt au coſinus de l'inclinaiſon de la puiſſance à l'égard du plan.*

700. De-là on peut conclure que deux puiſſances Q & R (*fig.* 135) pour être également capables de ſoutenir un même poids en équilibre ſur un même plan incliné, doivent être réciproquement proportionnelles aux coſinus des angles que leurs directions forment avec la longueur de ce plan.

En effet, puiſque Q peut faire équilibre au poids P, on a $Q : P ::$ ſin. ABG : coſ. SKB. Par la même raiſon, puiſque R eſt capable de faire équilibre à P, on a $P : R ::$ coſ. RIA : ſin. ABG; multipliant ces deux proportions, on a $Q : R ::$ coſ. RIA : coſ. SKB.

701. De ce que (695) $Q : P : H$ (*fig.* 136) :: ſin. ECD : ſin. FCD : ſin. ECF, on conclud $Q : P ::$ ſin. ECD : ſin. FCD; ou :: ſin. HCP : ſin. HCQ; donc ſi connoiſſant le poids P, la puiſſance Q, & l'angle HCP que la direction du poids P fait avec la perpendiculaire au plan, on veut déterminer celui que la direction de la puiſſance Q doit faire avec la même perpendiculaire, on l'aura facilement par cette proportion, qui donne ſin. $HCQ = \frac{P \times \text{ſin. } HCP}{Q}$. Mais (*Géom.* 272)

quand on détermine un angle par ſon ſinus, on n'eſt pas fondé à prendre pour valeur de cet angle, l'angle même qu'on trouve par les Tables, plutôt que ſon ſupplément; donc le même poids peut être ſoutenu ſur le même plan, par la même puiſſance dirigée de deux manières différentes. Ces deux directions doivent donc être telles que les deux angles HCQ, HCQ qu elles formeront avec la perpendiculaire CH, ſoient ſupplément l'un de l'autre; or ſi l'on prolonge la perpendiculaire HC, vers I, le plus grand de ces deux angles HCQ, eſt ſupplément de QCI; donc puiſqu'il doit auſſi être ſupplément du plus petit angle HCQ, il s'enſuit que QCI, & le plus petit angle HCQ, ſont égaux; donc *les deux directions ſuivant leſquelles une même puiſſance peut ſoutenir un même poids, ſur un même plan, ſont également inclinées a l'égard de la perpendiculaire à ce plan, & par conſéquent à l'égard de ce plan;* & elles tombent toujours toutes deux du côté de la perpendiculaire au plan, oppoſé à celui où ſe trouve la direction de la peſanteur du corps.

702. Dans la même proportion $Q : P ::$ ſin. HCP : ſin. HCQ, ſi l'on met au lieu de l'angle HCP, l'inclinaiſon ABG du plan, qui eſt égale à cet angle, ainſi qu'il eſt aiſé de le voir,

puiſque ces deux angles ſont compléments des angles oppoſés au ſommet BRP, CRH, on aura $Q : P :: \text{ſin. } ABG : \text{ſin. } HCQ$, & par conſéquent $Q = \frac{P \times \text{ſin. } ABG}{\text{ſin. } HCQ}$. Donc l'inclinaiſon du plan & le poids, reſtant les mêmes, la puiſſance Q doit être d'autant plus petite que le ſinus de ſon inclinaiſon à l'égard de la perpendiculaire, eſt plus grand; donc puiſque le plus grand de tous les ſinus eſt celui de 90 degrés, on peut dire que *la direction ſelon laquelle une puiſſance a le moindre effort à faire pour ſoutenir un poids ſur un plan incliné, eſt la direction parallèle à ce plan.*

703. Dans ce cas, la proportion $Q : P :: \text{ſin. } ABG : \text{ſin. } HCQ$, devient $Q : P :: \text{ſin. } ABG : 1$, ou au rayon. Or ſi du point A (*fig.* 137) on abaiſſe la perpendiculaire AL ſur l'horizontale BG; dans le triangle rectangle ALB, on a $\text{ſin. } ABG : 1 :: AL : AB$; donc $Q : P :: AL : AB$; c'eſt-à-dire, que *lorſque la puiſſance eſt parallèle au plan, elle eſt au poids, comme la hauteur du plan eſt à ſa longueur.*

704. Si la direction de la puiſſance étoit horizontale (*fig.* 138) l'angle HCQ ſeroit égal à l'angle BAL, ainſi qu'il eſt aiſé de le voir; on auroit donc alors $Q : P :: \text{ſin. } ABG$ ou $\text{ſin. } ABL$

: ſin. BAL; c'eſt-à-dire (*Géom.* 303) : : AL : BL; donc *quand la direction de la puiſſance eſt parallèle à la baſe du plan incliné, la puiſſance eſt au poids, comme la hauteur du plan eſt à la baſe.*

705. En général, la proportion $Q : P$: : ſin. ABG : ſin. HCQ (*fig.* 134) fait voir que la puiſſance ſera toujours d'autant plus petite, que l'inclinaiſon du plan à l'horizon ſera plus petite, & qu'en même temps, l'inclinaiſon de la puiſſance au plan ſera plus petite; car plus cette derniere inclinaiſon ſera petite, & plus l'angle HCQ qui en eſt le complément, approchera de 90 degrés.

706. Nous n'avons rien dit du point où la direction de la puiſſance doit être appliquée au corps. Ce point n'eſt déterminé par aucune autre condition, ſinon que la direction de la puiſſance rencontre la verticale menée par le centre de gravité du corps, en un point d'où la perpendiculaire menée ſur le plan, ait les conditions mentionnées (689 *& ſuiv.*). C'eſt par-là qu'on verra qu'une ſphère homogène, ou d'une matière uniforme, ne peut être ſoutenue ſur un plan incliné, que lorſque la direction de la force qui doit la ſoutenir, paſſe par ſon centre de figure qui eſt en même temps ſon centre de gravité.

707. Si au lieu d'oppoſer une ſeule puiſſance

à l'action du poids, on en oppoſoit pluſieurs, alors tout ce que nous venons de dire de la puiſſance Q, devroit s'entendre de la réſultante de ces puiſſances.

Par exemple, ſi le corps P (*fig.* 139) eſt ſoutenu ſur le plan incliné par l'action combinée d'une puiſſance R & de la réſiſtance d'un point fixe B auquel eſt appliquée la corde BOR qui embraſſe ce corps; on imaginera par le point de concours S des deux cordons EH, RD, une ligne SC qui diviſe en deux parties égales l'angle des deux cordons BH, RD. Si cette ligne coupe la verticale menée par le centre de gravité de P, en un point C, duquel on puiſſe abaiſſer ſur le plan, une perpendiculaire qui paſſe par le point d'attouchement H, l'équilibre ſera poſſible; & le rapport du poids P, à l'effort ſuivant SC, ſera déterminé par ce qui précède. Quant au rapport de l'effort ſuivant SC, à la puiſſance R, il ſera le même que dans la poulie mobile (584): Ainſi, ſi la puiſſance R eſt parallèle au plan, le poids P ſera à la puiſſance R, comme la longueur du plan eſt à la moitié de ſa hauteur; c'eſt-à-dire, que la puiſſance ſera moitié moindre que ſi elle ſoutenoit ſans le ſecours du point fixe B.

708. A l'égard de la preſſion totale qui s'exerce ſur le plan, elle ſera toujours facile à déterminer par

par les rapports que nous venons d'établir. Quant aux preſſions particulières qui en réſultent ſur chacun des points par leſquels le corps repoſe ou appuie ſur le plan, elle eſt abſolument indéterminée, ſi ce n'eſt dans le cas où le corps ne touche que par deux points; alors la preſſion totale ſe diſtribue à ces deux points, en raiſon inverſe des diſtances de ſa direction à ces deux mêmes points. Dans tout autre cas, il n'y a d'autres conditions pour les déterminer, ſinon 1° que leur ſomme ſoit égale à la preſſion totale; 2° que la ſomme de leurs momens pris par rapport à un axe perpendiculaire à la direction de cette preſſion totale, ſoit zéro; & qu'il en ſoit de même de la ſomme des momens par rapport à un autre axe perpendiculaire au premier, ces deux axes paſſant d'ailleurs par un point de la direction de la preſſion totale. Ainſi quand un corps repoſe ſur un plan par une ſurface plane, il n'y a aucune raiſon pour ſuppoſer que tous les points ſur leſquels il repoſe, éprouvent des preſſions égales, ſi ce n'eſt lorſqu'il a la figure d'un priſme ou d'un cylindre droit.

709. Si la puiſſance qui retient le poids P (*fig.* 140) en équilibre ſur le plan AB, eſt un autre poids Q repoſant auſſi ſur un plan incliné AC, & tirant à l'aide de la corde MN; on trouvera

facilement le rapport de ces deux poids, par ce qui a été dit (696).

En effet, la tenſion du cordon MN, faiſant équilibre au poids P, ſi du point A on mène AD perpendiculairement à MN, on doit (696) avoir $P : T :: BD : AD$, en nommant T cette tenſion. Mais la tenſion du cordon, de M vers N, eſt la même que ſa tenſion de N vers M, laquelle faiſant équilibre au poids Q, donne $T : Q :: AD : CD$. Multipliant ces deux proportions, on a $P : Q :: BD : CD$; c'eſt-à-dire, que ces deux poids ſont en raiſon des parties de la baſe BC, ſéparées par la perpendiculaire menée du ſommet commun des deux plans ſur la direction du cordon.

710. Si la corde paſſoit ſur une poulie, comme on le voit (*fig.* 141), on trouveroit le rapport des deux poids, par ce qui a été dit (699).

En effet, menons du point A la perpendiculaire AD ſur la baſe, & les lignes AE, AF parallèles aux deux cordons & terminées par les lignes DE, DF, perpendiculaires aux deux plans AB, AC. Nommant T la tenſion du cordon, on aura (699) $T : P :: \text{ſin. } ABC : \text{cof. } BAE :: \text{ſin. } ADI : \text{ſin. } AEI$ ou ſin. AED. Car $ADI = ABD$, & BAE eſt l'inclinaiſon du cordon GP au plan AB.

Or (*Géom.* 303) ſin. ADI : ſin. AED : : AE : AD; donc $T : P : : AE : AD$.

Par la même raiſon, & à cauſe de l'égalité de tenſion des deux cordons GP, GQ, on aura $Q : T : : AD : AF$; donc multipliant ces deux proportions, on aura $Q : P : : AE : AF$.

711. A l'égard des corps qui appuient ſur pluſieurs plans à la fois, ſoit en vertu d'une force unique, ſoit en vertu de pluſieurs forces dans leſquelles nous comprenons leur peſanteur; la loi générale de leur équilibre eſt 1° que la réſultante de toutes ces forces puiſſe être décompoſée en autant de forces qu'il y a de points par leſquels le corps appuie, & qui paſſent par ces points : 2° que celles-ci ſoient perpendiculaires au plan qui touche le corps en ce point.

De-là on conclura que pour qu'un corps qui n'eſt ſollicité que par ſa peſanteur, demeure en équilibre entre deux plans inclinés, il faut qu'il y ait dans la verticale qui paſſe par ſon centre de gravité, au moins un point duquel on puiſſe abaiſſer, ſur chacun de ces plans, une perpendiculaire; & que chacune de ces perpendiculaires ait les conditions mentionnées (689 & *ſuiv.*) : que par conſéquent ſi l'un des deux plans eſt horizontal (*fig.* 142), le corps ne peut demeurer en équilibre

(abſtraction faite du frottement) que dans le ſeul cas où la verticale menée par ſon centre de gravité, paſſeroit par quelqu'un des points où il touche le plan horizontal, ou du moins dans le cas où tous ces points ne ſe trouveroient pas tous d'un même côté de cette verticale; & alors l'autre plan n'a rien à ſoutenir.

712. Ces principes ſuffiſent pour déterminer les conditions de l'équilibre à l'aide des plans, dans toutes les circonſtances. C'eſt par-là qu'on peut expliquer la force des voûtes, & en général, pourquoi les corps creux & dont la ſurface extérieure eſt convexe, ont plus de force pour réſiſter à la compreſſion, que ſi leur ſurface étoit plane.

Par exemple, ſi un corps eſt compoſé de quatre parties *ABCD*, *CDFE*, *FEGH*, *ABGH* (*fig.* 143) parfaitement dures, dont les courbures extérieures & intérieures ſoient circulaires & concentriques; & que ſuivant des directions tendantes au centre, on appliqne au centre de gravité de chaque partie, une même force; jamais, quelle que ſoit cette force, ces parties ne ſe ſépareront les unes des autres. Car il eſt facile de voir que la force appliquée à chaque partie pourra toujours être cenſée décompoſée en deux autres, perpendiculaires aux deux faces planes de cette partie; & alors on verra que d'une partie à ſa voiſine, il y a toujours deux forces égales & directement oppoſées, qui par conſéquent ſe détruiſent; enſorte que toutes ces forces ſe font mutuellement équilibre.

Pareillement, ſi *EFGB*, *ABCD*, *HCKI* (*fig.* 144) repréſentent trois vouſſoirs conſécutifs, ou trois parties conſécutives d'une voûte; on peut toujours imaginer de quelque point de la verticale menée par le centre de gravité de chacun, une perpendiculaire ſur chacune des deux faces de ce vouſſoir; & comme il y a pluſieurs points propres à remplir cette condition, il y en aura toujours un qui ſera tel que la perpendiculaire menée ſur une face ſera directement oppoſée à la perpendiculaire menée ſur cette même face, par quelque point de la verticale appartenant au vouſſoir voiſin; or en donnant à chaque vouſſoir, un poids ſuffiſant, on pourra toujours rendre égales les deux forces dirigées ſuivant ces perpendiculaires, & par conſéquent mettre ces vouſſoirs en équilibre; il n'y a que les deux vouſſoirs dont une des faces ſera horizontale, pour leſquels cette décompoſition n'aura pas lieu, & qui pour être retenus, exigeront une réſiſtance horizontale.

713. Parlons, maintenant, du mouvement ſur les pláns, & en faiſant encore abſtraction du frottement.

Un corps qui eſt abandonné à ſa propre peſanteur, & qui appuie une partie de ſa ſurface ſur un plan ſans frottement, peut, généralement parlant, prendre deux ſortes de mouvement; l'un qui ſera commun à toutes les parties, & par lequel le centre de gravité gliſſera parallèlement au plan, & pourra auſſi s'approcher ou s'éloigner du plan; l'autre par lequel toutes les parties tourneront autour de

leur centre de gravité, de manière cependant, que le corps touche toujours le plan en quelque point.

714. La règle générale pour ſavoir ſi le corps prendra, ou ne prendra pas quelque mouvement de rotation, en vertu de ſa peſanteur, eſt d'examiner ſi la perpendiculaire menée du centre de gravité, ſur le plan, rencontre quelqu'un des points par où le corps touche, ou ne les laiſſe pas tous d'un même côté. Si cette condition a lieu, il n'y aura pas de mouvement de rotation; parce que la peſanteur qui peut toujours être cenſée agir au centre de gravité même, pourra toujours y être décompoſée en deux forces; l'une parallèle au plan, l'autre perpendiculaire à ce même plan. Or la ſeconde ayant les conditions requiſes (689 & *ſuiv.*) pour l'équilibre, ſera néceſſairement détruite. A l'égard de la première, puiſqu'elle paſſe par le centre de gravité, elle doit ſe diſtribuer également à toutes les parties, qui n'auront, par conſéquent, que des vîteſſes égales & parallèles au plan. Ainſi, pour le dire en paſſant, une ſphère homogène poſée ſur un plan incliné, y deſcendroit en gliſſant, & non en roulant, s'il n'y avoit point de frottement; parce que la perpendiculaire menée de ſon centre de gravité ſur le plan, rencontre toujours la ſurface de cette ſphère, au point où celle-ci touche le plan.

715. Mais ſi la perpendiculaire menée du centre de gravité ſur le plan, ne rencontre aucun des points par leſquels le corps touche le plan; & ſi en même-temps, elle les laiſſe tous d'un même côté, alors il y aura un mouvement de rotation, parce que la réſiſtance du plan qui s'exerce ſuivant la perpendiculaire au point de contact (ou ſuivant la perpendiculaire qui paſſe entre les points de contact, lorſqu'il y en a pluſieurs) équivaut à une force qui pouſſeroit le corps ſuivant une direction parallèle & en ſens contraire à celle ſelon laquelle il preſſe le plan; & comme, par la ſuppoſition, elle s'exerce ſuivant une ligne qui ne paſſe que par le centre de gravité, elle ne peut manquer (290) de faire naître un mouvement de rotation.

De la Vis.

716. La *vis AB* (*fig.* 145 & 146) eſt un cylindre revêtu extérieurement d'un relief dont l'inclinaiſon à l'égard de l'axe *AB* de ce cylindre, eſt par-tout la même.

L'*écrou* eſt le ſolide *XZ* que traverſe la vis, & dont l'intérieur eſt creuſé ou ſillonné de la même manière que la vis eſt revêtue à l'extérieur; en ſorte qu'il eſt exactement le moule de la partie de la vis qu'il embraſſe.

717. Tantôt l'écrou eſt fixe, & la vis doit en tournant, paſſer ſucceſſivement tous ſes filets à travers l'écrou; tantôt c'eſt la vis qui eſt fixe, & l'écrou doit en tournant, parcourir toute la longueur de la vis. Quel que ſoit celui des deux cas qui ait lieu, tant que la puiſſance eſt appliquée à la même diſtance de l'axe de la vis, il y aura toujours même rapport entre cette puiſſance & l'effort qu'elle eſt capable de faire dans le ſens de l'axe, effort qui eſt celui que l'on conſidère principalement dans la vis.

L'intervalle d'un filet de la vis, au filet voiſin, eſt ce qu'on appelle *la hauteur du pas de la vis;* ainſi *D F* (*fig.* 146) eſt la hauteur du pas de la vis, ou ſimplement, le pas de la vis.

718. On peut prendre une idée aſſez exacte de la vis en ſe repréſentant ſon relief, comme formé par l'enveloppement ſucceſſif des hypothénuſes *C K* (*fig.* 147) d'autant de triangles rectangles *C I K* qu'il doit y avoir de pas; chaque triangle aura pour hauteur, la hauteur *C I* du pas; & ſa baſe *I K* aura pour longueur la circonférence de la ſection cylindrique qui répond au point *I;* enſorte qu'à meſure que le filet deviendra plus épais, *I K* aura plus de longueur, la hauteur *C I* reſtant la même.

Dans la *figure* 146, où le relief des ſpires forme un tranchant; à meſure que le relief épaiſſit, il faut concevoir que la baſe IK (*fig.* 147) augmente, & que la hauteur CI diminue.

719. La vis AB (*fig.* 145) étant fixe, & dans une ſituation verticale; concevons qu'il n'y a point de frottement, & qu'on abandonne l'écrou à ſa propre peſanteur. Il eſt clair qu'il parcourra en tournant, tous les filets inférieurs de la vis, en gliſſant ſur chacun comme ſur une ſurface inclinée. Il n'eſt pas moins clair qu'on peut arrêter cet effort en appliquant, à l'écrou XZ, une puiſſance que l'on peut, d'ailleurs, ſuppoſer dirigée de pluſieurs manières différentes. Mais comme il eſt évident que l'écrou n'aura aucun mouvement ſi on l'empêche ſeulement de tourner, bornons-nous à chercher quel doit être le rapport entre le poids de l'écrou, ou en général, entre la force qui le pouſſeroit parallèlement à l'axe de la vis, & la force qui peut l'empêcher de tourner. Ne conſidérons d'abord que l'un des points de l'écrou, qui repoſe ſur l'un des points du filet de la vis.

La force qui agit immédiatement ſur ce point pour l'empêcher de tourner, & celle qui tend à le faire deſcendre parallèlement à l'axe, doivent être regardées comme ſe faiſant équilibre ſur un plan

incliné qui a pour hauteur la hauteur du pas de vis, & pour baſe la circonférence qui a pour rayon la diſtance de ce point à l'axe. C'eſt une ſuite de la génération que nous venons de donner de la vis. Or de ces deux forces, la première eſt parallèle à la baſe de ce plan incliné, & la ſeconde lui eſt perpendiculaire ; donc d'après ce qui a été dit (704) on voit que la partie de force parallèle à l'axe de la vis, qui s'exerce ſur un point quelconque du filet, eſt à la force qu'il faudroit appliquer immédiatement à ce point pour l'empêcher de tourner, & dans le ſens contraire à cette rotation, comme la baſe de ce plan incliné eſt à ſa hauteur, c'eſt-à-dire, comme la circonférence qui a pour rayon la diſtance de ce point à l'axe, eſt par rapport à la hauteur du pas de la vis.

Donc ſi l'on appelle f la première force ; t la ſeconde ; r la diſtance du point dont il s'agit, à l'axe ; h la hauteur du pas de vis, & qu'on ſuppoſe que $1 : c$ marque le rapport du rayon à la circonférence ; ce qui donnera rc pour la circonférence qui a r pour rayon ; on aura $f : t : : rc : h$.

Mais comme chaque point de l'écrou n'eſt point ſoutenu immédiatement, & que le tout eſt ſoumis à une ſeule puiſſance Q appliquée à quelque point de l'écrou, dont je ſuppoſe que la diſtance à l'axe, ſoit R ; il eſt clair (601) que R étant plus grand

que r, il faudra pour chaque point, une partie de la force Q d'autant moindre que la distance R sera plus grande; ensorte que si l'on nomme q, la partie de cette force qui à la distance R peut faire le même effort que fait t à la distance r, on aura $t : q :: R : r$.

Multipliant cette proportion, par la première, on aura $f : q :: cRr : hr :: cR : h$. C'est-à dire, que pour chaque point de l'écrou, appuyant sur le filet de la vis, il y a toujours même rapport entre la force qui le pousse parallèlement à l'axe de la vis & celle qui à une distance donnée R, l'empêcheroit de tourner; & ce rapport est celui de cR à h; or cR est la circonférence que décriroit la puissance Q en tournant. Concluons donc que la somme de toutes les forces f qui poussent l'écrou parallèlement à l'axe de la vis, est à la somme de toutes les puissances q nécessaires pour l'empêcher de tourner, c'est-à-dire, que la force totale (que j'appelle F) parallèle à l'axe de la vis, est à la force Q qui empêcheroit l'écrou de tourner par l'effet de la première force, comme la circonférence que tend à décrire cette puissance Q, est à la hauteur du pas de la vis.

720. Donc aussi la force qu'il faudroit employer parallèlement à l'axe de la vis, pour empêcher la puissance Q de faire tourner l'écrou, doit être à

cette puiſſance Q, comme la circonférence que tend à décrire cette dernière, eſt à la hauteur du pas de la vis.

721. Donc ſur une même vis, l'effet de la puiſſance Q ſera d'autant plus conſidérable, que cette puiſſance ſera appliquée plus loin de l'axe. Et ſur des vis différentes, la puiſſance étant également éloignée de l'axe, ſon effet ſera d'autant plus conſidérable, que la hauteur du pas de la vis ſera plus petite; c'eſt-à-dire, que plus les ſpires de la vis ſeront ſerrées, & plus la puiſſance aura d'effet pour comprimer dans le ſens de l'axe.

722. La vis eſt donc, ainſi qu'on le voit, une machine compoſée, qui participe du plan incliné & du levier. On l'emploie utilement pour comprimer les corps. Le frottement modifie, ſans doute, beaucoup les effets que cette machine devroit avoir en conſéquence du rapport que nous venons d'établir; on ne doit donc regarder le rapport que nous venons d'établir, que comme déterminant la limite des effets de cette machine.

723. Ce que la puiſſance gagne du côté de la force, elle le perd dans cette machine, comme dans toute autre, du côté de la vîteſſe. En effet,

pour que l'écrou parcoure un des pas de la vis, il faut que la puiſſance faſſe un tour entier.

724. Au reſte, ce déſavantage, ſi c'en eſt un, eſt inévitable. Mais on l'emploie utilement dans pluſieurs occaſions. Lorſqu'il s'agit, par exemple, de meſurer les différentes parties d'un très-petit eſpace *AB* (*fig.* 148), on le peut faire avec ſuccès, en faiſant parcourir cet eſpace, à l'extrémité *E* d'une vis *DE* dont les pas ſoient bien égaux. Si cette vis porte, à ſon autre extrémité, une aiguille qui, entraînée d'un mouvement commun avec la vis, parcoure ſucceſſivement les diviſions d'un cadran que celle-ci traverſe, on pourra après avoir éprouvé quel nombre de tours doit faire l'aiguille pour que le point *E* parcoure la longueur connue *AB*, déterminer enſuite, par le nombre de tours & portion de tours que cette aiguille ſera obligée de faire pour que le point *E* parcoure une partie quelconque de *AB*; déterminer, dis-je, la vraie meſure de cette partie, ſi petite qu'elle ſoit.

725. L'application de la vis, aux autres machines, peut en augmenter beaucoup l'effet. Par exemple, ſi la puiſſance Q appliquée à la manivelle *DEQ* (*fig.* 149) fait tourner la vis *AB*, dont les ſpires mènent les dents de la roue *M*, & l'obligent de tourner; & que celle-ci entraîne avec elle un cylindre qui, en tournant, force la corde *KP* de s'envelopper: voici comment on determinera le rapport de la puiſſance Q, au poids P.

En appelant *L* l'effort que le filet de la vis fait ſur la dent *L*, on aura Q : *L* : : *AB*

: $Cir DE$, AB étant la hauteur du pas, & $Cir DE$ marquant la circonférence que décriroit la puiſſance Q (719). L'effort L, eſt une puiſſance qui appliquée à la circonférence de la roue, fait effort contre le poids; ainſi (676) on a $L : P :: IK : IL$; donc en multipliant ces deux proportions, on a $Q : P :: AB \times IK : IL \times Cir DE$; proportion qui fait voir que Q aura d'autant plus d'avantage, que AB & IK ſeront plus petits, à l'égard de $Cir DE$ & IL.

Du Coin.

726. Le coin $ADECB$ (*fig.* 150) eſt un priſme triangulaire que l'on introduit dans une fente IZR déjà commencée, ou en général, entre deux ſurfaces, pour augmenter cette fente, ou pour écarter davantage ſes faces, ou enfin pour les fixer à une ouverture déterminée.

727. La théorie du coin conſidéré comme inſtrument à fendre, eſt encore très-imparfaite, & le ſera probablement encore long-temps. Comme il n'eſt pas de corps qui n'ait une certaine flexibilité, les parties de la fente que touchent les faces du coin peuvent être écartées davantage, ſans que pour cela le point Z où ſe termine la fente, change

de place ; enſorte qu'une partie de la force appliquée à la tête $ADEC$ du coin, eſt uniquement employée à fléchir les deux branches ſéparées par la fente ; & l'autre eſt employée à tendre les fibres de la partie non entamée.

728. Si les branches ZFG, ZKL étoient inflexibles, & que les fibres qui lient les parties de ce qui reſte à fendre, cédaſſent toutes en même-temps ; on pourroit, lorſque la rupture eſt ſur le point de ſe faire, enviſager les choſes de cette manière. Concevoir que le corps eſt actuellement fendu, & ſubſtituer à la réſiſtance de la partie $ZFGV$, & à celle de la partie $ZKLX$, des forces appliquées perpendiculairement à VM & XS, & à des diſtances égales à celles où l'effort total de chacune de ces deux réſiſtances s'exerce. Alors pour avoir le rapport de la force P, aux deux réſiſtances M & S qu'oppoſent les deux parties que l'on veut ſéparer, voici ce que l'on conſidéreroit.

729. La force appliquée perpendiculairement à la tête du coin, doit, pour avoir pleinement ſon effet, rencontrer un appui ſolide dans la baſe VX, & par conſéquent ſi le corps n'étoit pas aſſujetti, & qu'il n'y eût point de frottement, il faudroit que cette force rencontrât perpendiculairement la baſe, ſi la baſe porte ſur un plan.

S'il y a du frottement, il ne ſera pas indiſpenſable qu'elle ſoit perpendiculaire à la baſe; mais il faut qu'elle la rencontre, & qu'elle ne faſſe pas avec la baſe, un angle moindre que celui que nous déterminerons dans peu en parlant du frottement, ſans quoi le corps ſe renverſeroit.

Si la baſe eſt fixement retenue par un point, alors il faut que la direction de la force perpendiculaire à la tête du coin, paſſe par ce point. Ces conditions ſuppoſées, voici comment s'exerce l'action de la force *P*.

730. Pour que la force *P* ſe communique aux deux branches *ZFG*, *ZKL*, il faut, en ſuppoſant, qu'il n'y eût pas de frottement, qu'il y ait ſur ſa direction au moins un point *O* duquel on puiſſe abaiſſer une perpendiculaire ſur chaque face de la fente, & qui paſſe par quelqu'un des points où cette face eſt touchée par celle du coin. Mais s'il y a du frottement, cette condition n'eſt pas néceſſaire; il ſuffit qu'il puiſſe y avoir dans la direction de la force *P*, un point *O* duquel on puiſſe mener deux lignes *OR*, *OI* qui paſſent par les points de contact, & qui n'y faſſent point avec les faces, un angle plus petit que celui du frottement. C'eſt à ces conditions que la force *P* pourra être pleinement tranſmiſe aux deux faces.

731.

731. On voit donc, par ce que nous venons de dire, que les connoiſſances qu'il faudroit avoir pour déterminer quelles forces on doit employer pour ſéparer les parties d'un corps, à l'aide du coin, laiſſent beaucoup d'obſcurité ſur ſa théorie. Contentons-nous donc d'avoir une ſorte de limite ſur cette théorie, & déterminons le rapport de la puiſſance P, à chacune des deux réſiſtances M & S, abſtraction faite du frottement, & en ſuppoſant que la baſe VX appuie ſur un plan.

732. On concevra la force P repréſentée par OQ, décompoſée en deux autres, dirigées ſuivant les perpendiculaires ON, OM, aux deux faces du coin. Ces deux forces feront effort pour faire tourner les deux parties du corps; la première autour de V, la ſeconde autour de X. Et les réſiſtances M & S dans les deux ſens oppoſés, ſont les forces qui s'oppoſent à ce mouvement de rotation. Menant donc les perpendiculaires VY, XT, ſur ON, OM, on regardera MVY & SXT, comme deux leviers angulaires, dont les appuis ſont en V & X.

Cela poſé, en nommant I la force ſuivant ON, on aura $P : I :: OQ : ON$; mais puiſque nous ſuppoſons la force P perpendiculaire à la tête du coin, & les deux forces ON, OM, perpendiculaires

à ſes faces, le triangle ONQ eſt ſemblable au triangle ABC, & l'on a $OQ : ON :: AC : AB$; donc $P : I :: AC : AB$. Si l'on nomme M la réſiſtance de la partie $ZFMV$, ſuppoſée paſſer à la diſtance VM, ou aura, par la propriété du levier, $I : M :: VM : VY$. Multipliant ces deux proportions, on aura $P : M :: AC \times VM : AB \times VY$. Et pour l'autre face, on trouvera de même $P : S :: AC \times XS : BC \times XT$.

733. Si le corps étoit retenu, il faudroit enviſager la choſe un peu différemment; mais comme malgré ces conſidérations, nous n'en ſerions pas plus avancés ſur la véritable théorie du coin, qui tient à des connoiſſances phyſiques que nous n'avons point, nous ne nous arrêterons pas davantage ſur cette matière. Nous ferons ſeulement obſerver qu'il ſuit de la proportion $P : M :: AC \times VM : AB \times VY$; qu'en général, l'effet du coin ſera d'autant plus conſidérable, que cet inſtrument ſera plus aigu, puiſqu'alors AC ſera d'autant plus petit par rapport à AB. C'eſt à cet inſtrument qu'on doit rapporter l'effet des couteaux, raſoirs, &c. & de tous les inſtrumens tranchans.

Du Frottement.

734. La ſurface des corps, même les plus polis, eſt hériſſée d'un très-grand nombre d'éminences ou aſpérités, & criblée de pluſieurs cavités qu'on appelle *Pores*. Lorſqu'un corps repoſe ſur un autre, les parties ſaillantes de l'un, pénétrent dans les pores ou parties rentrantes de l'autre; & on ne peut dégager les unes des autres, qu'en employant une certaine force.

735. La réſiſtance qui naît de cette propriété des corps, eſt ce qu'on appelle la force du *frottement*. On diſtingue deux ſortes de frottement; celui qui a lieu, lorſqu'une des ſurfaces doit ſimplement gliſſer ſur l'autre; & celui qui a lieu, lorſqu'une des ſurfaces, ou toutes deux, doivent ſe mouvoir en tournant; tel eſt le frottement des roues ſur le terrein. La réſiſtance provenant de cette ſeconde eſpèce de frottement, eſt beaucoup moindre que la première; parce que ce mouvement de rotation contribue en partie à dégager les aſpérités.

736. Si les éminences dont la ſurface des corps eſt couverte, étoient parfaitement dures, & parfaitement liées à la ſurface, il faudroit, pour vaincre le frottement, ſoulever la maſſe. Et ſi elles étoient parfaitement flexibles, il n'y auroit aucune réſiſ-

tance, aucun frottement. Mais comme elles ne ſont ni parfaitement dures, ni parfaitement flexibles, il s'enſuit 1°. que la réſiſtance du frottement vient en partie de la difficulté de fléchir les aſpérités, en partie de la néceſſité de ſoulever un peu le corps. 2°. Que les aſperités n'ayant qu'un certain degré d'adhérence à la ſurface, lorſque la force néceſſaire pour faire gliſſer, ſurpaſſera ce degré d'adhérence, les aſpérités cèderont à cette force, ſe briſeront, & les ſurfaces s'uſeront. Ainſi, l'effet du frottement dans les machines, eſt non-ſeulement d'abſorber une partie de la force motrice, mais encore d'accélérer la deſtruction des machines.

737. Il paroît très-difficile, pour ne pas dire impoſſible, d'établir des règles générales ſuffiſamment exactes, pour déterminer le frottement. En effet, on conçoit aiſément que cette réſiſtance doit varier ſelon le tiſſu & la nature des ſurfaces, objets ſuſceptibles d'autant de variétés qu'il y a de matières différentes. Elle doit varier ſelon le degré de dureté des ſurfaces frottantes, & la flexibilité de leurs aſpérités, ſelon que les parties ſaillantes ſeront d'une figure & de dimenſions plus ou moins promptes à pénétrer dans les pores; ſelon que la preſſion qui applique les ſurfaces l'une à l'autre, ſera plus ou moins grande; ſelon que cette preſſion aura agi

plus ou moins long-temps; car les parties des ſurfaces ayant toujours une certaine flexibilité, les parties ſaillantes s'engageront plus ou moins profondément, ſi par un plus long ſéjour, elles ont plus le temps d'écarter ou élargir les pores dans leſquels elles tendent à pénétrer.

738. C'eſt à l'expérience ſeule qu'il appartient de nous éclairer ſur ces faits; de nous apprendre juſqu'à quel point chacune de ces cauſes contribue à la réſiſtance du frottement. Les connoiſſances que l'expérience a données juſqu'ici, ne ſont point encore ni auſſi parfaites ni auſſi nombreuſes qu'il ſeroit à deſirer; néanmoins elles peuvent être utiles en beaucoup d'occaſions. Nous allons les expoſer, ainſi que la méthode de les appliquer au calcul des effets du frottement dans diverſes eſpèces de machines & de mouvemens.

739. 1°. Lorſque les ſurfaces qui doivent gliſſer l'une ſur l'autre ſont de même matière, la réſiſtance du frottement, toutes choſes d'ailleurs égales, eſt plus grande que lorſqu'elles ſont de matières différentes. Ainſi deux bois de différente eſpèce auront moins de difficulté à ſe mouvoir l'un ſur l'autre, que deux bois de même eſpèce; le fer frottera moins ſur le cuivre, que le fer ſur le fer, ou le cuivre ſur le cuivre.

2°. Plus les ſurfaces ſont raboteuſes, ou moins elles ont été préparées & polies, plus la réſiſtance du frottement eſt grande. On peut donc diminuer cette réſiſtance, en poliſſant les ſurfaces, ou en bouchant autant qu'on le peut, leurs pores, avec quelque matière telle que l'huile, le ſavon, la graiſſe, &c. en un mot avec quelque matière qui en bouchant les pores ne faſſe pas contracter une nouvelle adhérence aux ſurfaces.

3°. Quoique l'étendue des ſurfaces ſemble devoir contribuer ſenſiblement à faire varier le frottement, cependant il paroît par un grand nombre d'expériences, que cette étendue n'y contribue que pour très-peu de choſe; en ſorte qu'on n'éprouve, communément, pas plus de difficulté à traîner un corps ſur une de ſes faces que ſur l'autre, quoiqu'elles ſoient différentes en étendue, pourvu que le poli ſoit le même. Il faut cependant en excepter les cas où le corps repoſe par une pointe; alors le frottement eſt plus conſidérable, parce que les aſpérités s'engagent plus profondément, que lorſque le corps repoſant par pluſieurs points, il s'en trouve parmi ceux-ci, qui s'oppoſent à l'enfoncement.

4°. C'eſt principalement de la preſſion, que dépend la réſiſtance du frottement; en ſorte que cette réſiſtance paroît augmenter proportionnellement à la preſſion. C'eſt-à-dire, qu'on éprouve deux

fois plus de réſiſtance pour vaincre le frottement, lorſque le corps eſt deux fois plus peſant, ou lorſque la force qui applique ſa ſurface contre une autre ſurface, eſt deux fois plus grande.

5°. Néanmoins, le temps pendant lequel les deux ſurfaces ſont appliquées, ſoit par leur peſanteur, ſoit par toute autre force, contribue à faire varier la réſiſtance du frottement; mais l'expérience n'a pas encore déterminé comment cette réſiſtance augmente eu égard au temps; d'ailleurs on ſent aſſez que l'augmentation dûe à cette cauſe doit avoir des limites, & que ces limites varieront ſuivant la nature des ſurfaces frottantes.

6°. Pour les ſurfaces de même matière, frottant ſur une même matière quelconque, lorſque le poli eſt le même, ou que ces ſurfaces ont été préparées également, le frottement eſt ſenſiblement le même; & il eſt une partie déterminée de la preſſion, en ſorte que pour certaines matières, il eſt le tiers de la preſſion; pour d'autres, il en eſt le quart, & ainſi de ſuite.

740. La raiſon que l'on donne aſſez ordinairement pour expliquer pourquoi le frottement ne dépend pas de la grandeur des ſurfaces, eſt que ſi le nombre des points de la ſurface frottante eſt plus conſidérable, la force qui preſſe chacun, en

eſt d'autant plus petite, & *vice versâ*; chaque éminence pénètre donc d'autant moins ou d'autant plus les cavités; en ſorte que s'il y a un plus grand nombre d'éminences à dégager; on n'a à les dégager que d'une quantité d'autant moindre; & par conſéquent, dit-on, il doit toujours y avoir le même effort à faire.

Mais cette concluſion ſuppoſe que l'effort que l'on a à faire pour dégager les parties, eſt proportionnel à nombre égal) à la quantité dont elles ſont engagées; ſuppoſition qui ne paroît admiſſible que lorſque la quantité dont elles s'engagent, eſt très-petite, même à l'égard de la profondeur des cavités. Auſſi l'expérience ne fait-elle pas voir que le frottement ſoit bien exactement proportionnel à la preſſion ſeule; le frottement des corps pointus forme une exception qui confirme la remarque que nous faiſons. Et la pente que l'on donne au plan ou chantier ſur lequel on conſtruit les vaiſſeaux, forme encore une exception remarquable, puiſque pour le mettre en état d'aller à l'eau, cette pente ne va quelquefois qu'à 6 lignes par pied; ce qui eſt beaucoup au-deſſous de ce que l'expérience donne ſur la plupart des matières, où cette pente eſt communément de 15 à 18 degrés. Il y a donc bien lieu de croire qu'ici les ſurfaces entrent pour beaucoup dans le frottement.

741. Après ces obſervations ſur ce que l'on ſait du frottement, par le ſecours de l'expérience; voyons comment, lorſqu'une fois on a déterminé la quantité du frottement ſur une eſpèce de matière connue, on peut en conclure l'effet qu'elle produira ſur une machine ou ſur un mouvement propoſé. Nous regarderons le frottement comme proportionnel à la preſſion ſeule.

742. Prenons pour premier exemple le poids *P* (*fig.* 151) poſé ſur le plan horizontal *AB*, & tiré par le poids Q, parallèlement à *AB*. Suppoſons que le corps Q n'ait préciſément que le poids néceſſaire pour mettre le corps *P* ſur le point de gliſſer. Voyons quel rapport il doit y avoir entre le poids Q & la force du frottement.

Du centre de gravité *G* du corps *P*, menons la perpendiculaire *GH* ſur le plan *AB*. La peſanteur ſollicite le corps *P*, ſuivant *GH*, tandis qu'il eſt ſollicité par le corps Q, ſuivant *KD* qui rencontre *GH* en *K*. Du concours de ces deux forces, il réſulte un effort ſuivant une ligne quelconque *KI*, qui rencontre en *I* le plan horizontal; & cet effort doit être détruit, puiſqu'on ſuppoſe que le corps *P* n'eſt que ſur le point de ſe mouvoir. Concevons l'effort ſuivant *KI* ou *KIZ*, appliqué au point *I*, & décompoſé en deux, l'un perpen-

diculaire au plan, l'autre ſuivant la direction du plan; il eſt facile de voir que ces efforts ſeront abſolument les mêmes que ceux qui étoient dirigés ſuivant KH, & ſuivant KD. De plus, le premier de ces efforts ſera évidemment détruit, du moins s'il rencontre le plan AB en quelque point I qui lui ſoit commun avec la ſurface du corps. A l'égard du ſecond, comme il eſt ſuivant la direction même du frottement, il ne ſera détruit qu'autant qu'il ſera préciſément égal à la force du frottement; ainſi il faut que Q ſoit préciſément égal à la force du frottement.

743. On voit par-là, comment on peut s'y prendre pour déterminer la valeur du frottement; on prendra ſucceſſivement pour Q, différens poids juſqu'à ce qu'on en ait rencontré un qui mette le corps P ſur le point de ſe mouvoir.

Mais pour ne point comprendre dans l'évaluation du frottement du corps P, des effets étrangers à celui qu'on cherche; il faudra avoir ſoin 1°. que la poulie D ſoit très-mobile, & que le cordon KDQ ſoit le plus flexible que faire ſe pourra. 2°. D'attacher le cordon CD en un point C le plus près de la ſurface AB qu'il ſera poſſible; la néceſſité de cette attention vient de ce que, toutes choſes d'ailleurs égales, le point I

où l'effort ſuivant KI rencontre la ſurface AB, s'approchera d'autant plus de l'extrémité S de la baſe du corps, & même de tomber hors de cette baſe, que le point C ſera plus élevé au-deſſus du plan. Or dans le cas où le point I tomberoit hors de la baſe, l'effort perpendiculaire au plan n'étant point totalement détruit, il en réſulteroit (714) un mouvement de rotation dans le corps; & le frottement que l'on détermineroit alors, pourroit différer beaucoup de celui qu'on cherche, c'eſt-à-dire, de celui qui empêche le mouvement pour gliſſer, puiſque le corps tournant alors ſur une pointe, éprouveroit un frottement beaucoup plus conſidérable. Au lieu qu'en prenant le point C très-près du plan AB, le point I ſera toujours très-près du point H, & l'on aura d'autant moins à craindre que toute la preſſion ne ſe raſſemble au ſeul point S.

744. Conſidérons maintenant un poids poſé ſur un plan incliné, & retenu par le ſeul effet du frottement. L'action de la peſanteur dirigée ſuivant la verticale GZ (*fig.* 152) qui paſſe par le centre de gravité G du corps P, rencontrant en I l'un des points de la ſurface AB du plan, doit s'y décompoſer en deux efforts, l'un perpendiculaire au plan, l'autre ſuivant le plan. Le premier ſera

détruit ſi le point I n'eſt pas hors de la baſe RS; & le ſecond pour être détruit, doit être égal à la force du frottement. Or il eſt facile de voir en formant le parallélogramme $ILZH$, que ſi IZ repréſente le poids du corps, IH ſera la preſſion, & IL la force du frottement; donc puiſque les triangles ſemblables ILZ, ABC donnent $IL : LZ$ ou $IH :: BC : AC$, on voit que la force du frottement doit être à la preſſion, comme la hauteur du plan eſt à ſa baſe. On voit pareillement que $IL : IZ :: BC : AB$, c'eſt-à-dire, que la force du frottement eſt au poids même du corps, ou, en général, à la force qui ſollicite le corps, comme la hauteur du plan eſt à ſa longueur.

745. Ces principes peuvent auſſi ſervir à déterminer le frottement ſur différentes ſurfaces; on élèvera ſucceſſivement le plan AB juſqu'à ce que le corps P ſoit ſur le point de gliſſer; alors meſurant la hauteur & la baſe, on aura le rapport de la force du frottement à la preſſion. Mais il faudra obſerver d'y employer pour P des corps dont le centre de gravité ſoit très-peu élevé au-deſſus du plan; afin que le point I où la verticale GZ rencontre le plan, ne ſorte pas hors de la baſe RS, & ne paſſe pas même au point R; car alors le frottement qu'on auroit à vaincre étant

celui d'un corps qui frotte par une pointe, ſeroit beaucoup plus conſidérable que celui dont il s'agit.

746. Par-là, & par ce qui a été obſervé (714), on voit que ce qui a été dit par pluſieurs Auteurs; ſavoir, qu'un corps poſé ſur un plan incliné, doit culbuter lorſque la verticale menée par ſon centre de gravité, ne rencontre pas la baſe par laquelle il s'appuie, doit s'entendre du cas où il y a du frottement; lorſqu'il n'y a pas de frottement, les conditions pour que le corps ſe renverſe ſont différentes (714).

747. Par ces deux exemples, on voit qu'ayant égard au frottement, la condition pour qu'un corps demeure en équilibre ſur une ſurface propoſée & de manière à être dans l'état le plus prochain du mouvement, eſt que la force unique qui agit ſur lui, lorſqu'il n'y en a qu'une, ou la réſultante de toutes les forces qui agiſſent ſur lui, ait à l'égard de la ſurface ſur laquelle il doit gliſſer, une inclinaiſon *GIS*, ou *ZIL* (*fig.* 152) telle que l'on ait *IL* : *LZ* comme la force du frottement eſt à la preſſion; or (*Géom.* 300) *IL* : *LZ* : : 1 : tang. *LIZ*, 1 étant le rayon des tables; donc l'inclinaiſon *LIZ* doit être telle que le rayon ſoit à la tangente de cette inclinaiſon, comme la force du frottement, eſt à la preſſion; donc ſi une fois on

a déterminé le rapport de la force du frottement, à la preſſion, il ſera toujours facile de déterminer quelle inclinaiſon doit avoir la réſultante de toutes les forces qui agiſſent ſur le corps, pour que ce corps ſoit dans l'état d'équilibre le plus prochain du mouvement. Dorénavant nous appellerons cet angle *LIZ*, l'*angle du frottement*. Cet angle eſt donc différent, ſuivant les différentes eſpèces de matières; ſuivant qu'elles ont été plus ou moins préparées ou polies, &c. Si le frottement eſt le tiers de la preſſion, ainſi que cela a lieu, à peu près, dans un aſſez grand nombre de matières qui ont été paſſablement aplanies, la tangente de *LIZ* ſera triple du rayon; or l'angle dont la tangente eſt triple du rayon, eſt de $71^{d}\ 34'$; ce ſera donc là l'angle du frottement pour ces ſortes de matières.

748. C'eſt d'après cette obſervation qu'on peut déterminer facilement, dans chaque machine, quel rapport il doit y avoir entre la puiſſance & le poids, dans le cas du frottement, pour que la machine ſoit ſur le point de ſe mouvoir.

749. Prenons d'abord le levier, & ſuppoſons que l'appui eſt un ſimple ſoutient tel qu'on le voit (*fig.* 153). Nous avons vu (606) qu'en pareil cas il ne pouvoit y avoir équilibre, qu'autant que la réſultante *DC* des deux forces *P* & *Q* ſeroit

perpendiculaire en C, à la tangente commune de la ſurface du levier, & de celle de l'appui. Dans le cas du frottement, il n'en eſt pas de même ; il faut que la réſultante ſoit encore dirigée du point D, à l'appui C; mais il ſuffit pour l'équilibre que l'inclinaiſon DCA ſoit plus grande que l'angle du frottement, angle que l'on doit, d'ailleurs, déterminer par expérience. Et pour l'état d'équilibre le plus prochain du mouvement de la part de la puiſſance Q, il ſuffit que l'inclinaiſon DCA ſoit préciſément égale à l'angle du frottement, parce que ſi l'on imagine la force ſuivant DC décompoſée en deux autres, l'une perpendiculaire à AB, l'autre ſuivant CA ; la force ſuivant CA ſera plus petite que le frottement, dans le premier cas ; & lui ſera préciſément égale dans le ſecond ; à l'égard des deux forces P & Q, elles n'en ſeront pas moins en raiſon inverſe des deux perpendiculaires CK, CL, puiſque leur réſultante doit toujours paſſer par le point C.

750. A l'occaſion de cette queſtion, nous examinerons, en paſſant, l'explication que l'on trouve dans quelques Auteurs, du fait repréſenté par la (*fig.* 154) ; voici de quoi il s'agit.

$DFKM$ eſt un ſeau ſuſpendu ſur le bord H de la table LH, par le moyen de deux bâtons BC, AB formant un angle droit en B, dont le premier appuie contre le fond

du ſeau, & l'autre contre l'anſe. Lorſqu'on appuie le ſyſtême à l'aide du bâton AB ſur le bord H de la table, ſi on lui donne une diſpoſition telle que le centre de gravité G du ſeau ſe trouve répondre verticalement au point H, le ſeau ne tombe point. La raiſon que l'on en trouve dans quelques Auteurs, eſt qu'alors le poids du ſeau peut être cenſé réuni au point H comme en un point d'appui; & comme le point H eſt ſuppoſé ne pouvoir céder, le ſeau ne doit pas prendre de mouvement.

Il eſt certain que tout le poids du ſeau peut être cenſé réuni en H. Mais on peut toujours le concevoir compoſé de deux forces RH, AH, l'une perpendiculaire à AB, & l'autre ſelon cette direction. Il eſt inconteſtable que l'effort HR ſera détruit; mais l'effort AH, ne peut l'être qu'autant qu'il y aura un frottement ſuffiſant. Ce fait eſt donc un effet du frottement, & non pas une ſuite néceſſaire de ce que la verticale GC paſſe par le point H. Car ce fait peut avoir ou ne pas avoir lieu ſelon le rapport du poids du ſeau, à la force du frottement.

Au reſte, comme ce fait n'eſt que de pure curioſité, nous ne nous y ſerions point arrêtés, s'il ne fourniſſoit un exemple ſimple de la différence des conditions de l'équilibre dans le cas du frottement & hors de ce cas.

751. Mais ſi le point d'appui eſt tel que le levier ne puiſſe prendre d'autre mouvement qu'un mouvement de rotation; c'eſt-à-dire, ſi le levier eſt traverſé par un axe, eſſieu ou boulon, alors on ſe conduira de la manière ſuivante qui eſt commune

commune à ce levier, à la poulie & au treuil, du moins quand on ſuppoſe dans ce dernier que le poids & la puiſſance ſont dans un même plan : nous allons appliquer au treuil ce dont il s'agit ; on verra enſuite facilement comment cela s'applique au levier & à la poulie.

752. Soient donc (*fig.* 155) *HFI* le plan de la roue ; *GKL* la ſection du cylindre ; *DNM* celle de l'axe autour duquel toute la machine doit tourner. Dans le cas où il n'y auroit pas de frottement, il faudroit que la réſultante des deux puiſſances *P* & *Q*, qui paſſe néceſſairement par leur point de concours *A*, paſsât auſſi par le centre *C* de l'axe. Mais s'il y a du frottement, la machine pourra demeurer en équilibre tant que la direction de la réſultante, que je ſuppoſe être *AD*, ne fera point avec la ſurface *NDM*, c'eſt-à-dire, avec la tangente au point où *AD* rencontre cette ſurface, un angle plus petit que l'angle du frottement. C'eſt ce qu'on verra facilement en imaginant cette force décompoſée en force perpendiculaire à la tangente en *D*, & en force ſuivant cette tangente.

Cela poſé, puiſque *AD* eſt la direction de la réſultante, on aura (201) $Q : P :: \text{ſin. } GAD : \text{ſin. } DAF$, c'eſt-à-dire, en imaginant *AC*, $:: \text{ſin. } (GAC + CAD) : \text{ſin. } (CAF - CAD)$.

Or 1° ſi l'on mène CE perpendiculaire ſur AD, dans le triangle rectangle CED, l'angle CDE eſt le complément de l'angle que AD fait en D avec la ſurface NDM; il eſt par conſéquent cenſé connu. Ainſi ſi l'on appelle f, l'angle du frottement, il ſera le complément de f. Et ſi l'on appelle r', le rayon CD de l'eſſieu, on aura $CE = r'$ cof. f, en ſuppoſant le rayon des Tables, égal à 1. 2°. Comme les directions de P & de Q ſont cenſées connues, ainſi que les dimenſions de la machine, les angles GAC, CAF, & la diſtance AC, ſont tous cenſés connus. Ainſi, dans le triangle rectangle CAE, où l'on connoît AC & $CE = r'$ cof. f, il ſera donc facile de calculer l'angle CAE; je le nomme e; & je nomme a & b, les angles GAC, CAF; alors on a donc $Q : P :: \text{ſin.}\ (a + e) : \text{ſin.}\ (b - e)$, & par conſéquent..... $Q = \frac{P \text{ ſin. } (a + e)}{\text{ſin. } (b - e)}$; c'eſt-là la valeur de la puiſſance dans le cas du frottement.

753. A l'égard des angles a, b & e, voici comment on les déterminera.

Soit r le rayon CG du cylindre, R celui CF de la roue, r' celui CM de l'eſſieu; A l'angle compris entre la direction AQ de la puiſſance & la direction AP du poids.

En considérant AC comme rayon, CG, CF & CE sont les sinus des angles CAG, CAF & CAD. On a donc $r : R :: \text{sin. } a : \text{sin. } b$ ou $:: \text{sin} : a \text{ sin. } (A - a)$, & CE ou....., $r' \text{ cos. } f : CG$ ou $r :: \text{sin. } e : \text{sin. } a$; donc sin. $e = \frac{r'}{r} \text{ sin. } a \text{ cos. } f$; & $r \text{ sin. } (A - a) = R \text{ sin. } a$. Donc dès qu'on connoîtra a, on connoîtra e par l'équation $\text{sin. } e = \frac{r'}{r} \text{ sin. } a \text{ cos. } f$, & b par l'équation $b = A - a$.

Or pour avoir a, l'équation $r \text{ sin. } (A - a) = R \text{ sin. } a$, donne (*Géom.* 286) cette autre équation; $r \text{ sin. } A \text{ cos. } a - r \text{ sin. } a \text{ cos. } A = R \text{ sin. } a$; d'où l'on tire $\frac{\text{sin. } a}{\text{cos. } a}$ ou tang. $a = \frac{r \text{ sin. } A}{R + r \text{ cos. } A}$.

754. Pour donner un exemple, supposons que l'angle A soit de 50 degrés; que le rayon de la roue soit de 6 pieds; celui du cylindre, de $\frac{1}{2}$ pied; & celui de l'essieu, de 1 pouce ou $\frac{1}{12}$ de pied; que le frottement soit le tiers de la pression; c'est-à-dire (747) que le rayon des Tables est à la tangente de l'angle f du frottement, $:: 1 : 3$; on trouvera donc que l'angle f est de $71^d\ 34'$, dont le cosinus est 0,3162.

On a donc cos. $f = 0{,}3162$, $R = 6$, $r = \frac{1}{2}$, $r' = \frac{1}{12}$, & par conséquent $r' \text{ cos. } f = 0{,}02635$. Cela posé, on aura tang. $a = \frac{r \text{ sin. } A}{R + r \text{ cos. } A} = \frac{\frac{1}{2} \text{ sin. } 50^d}{6 + \frac{1}{2} \text{ cos. } 50^d} = \frac{\frac{1}{2} \times 0{,}76604}{6 + \frac{1}{2} \times 0{,}64279} = \frac{0{,}38302}{6{,}32139} = 0{,}06059$ qui répond à

$3^d\ 28'$; donc $a = 3^d\ 28'$, & par conſéquent $b = 46^d\ 32'$.

A l'égard de e, on a ſin. $e = \frac{r'}{r}$ ſin. a coſ. f; on a donc ſin. $e = \frac{\text{ſin. } a}{r} \times 0{,}02635 = \frac{0{,}06047}{\frac{1}{2}} \times 0{,}02635 = 0{,}003187$, qui répond à $11'$; donc $e = 0^d\ 11'$.

On a donc $Q = P \times \frac{\text{ſin. } 3^d\ 39'}{\text{ſin. } 46^d\ 21'}$. Suppoſons P de 1200£, on trouvera donc $Q = 105£{,}6$. Mais ſans le frottement on auroit $Q : P :: \frac{1}{2} : 6 :: 1 : 12$; donc on auroit $Q = 100£$. Donc, dans l'exemple actuel, le frottement n'exige qu'une augmentation de $5£{,}6$ dans la puiſſance.

755. Nous avons ſuppoſé, pour déterminer la puiſſance propre à vaincre le frottement, que la preſſion totale n'eſt pas différente de celle qui auroit lieu, ſi la puiſſance & le poids n'étoient pas dans un même plan; & cela eſt ainſi en effet. Voici comment on peut s'en convaincre.

Suppoſons pour un moment, que la direction du poids P appliqué à la ſurface du cylindre (*fig.* 156), au lieu d'être verticale, fût inclinée, peu importe comment; mais pour plus de ſimplicité, ſuppoſons-la telle que IA, c'eſt-à-dire, dans le plan vertical qui paſſe par IP, & qui touche la ſurface du cylindre.

Concevons que A ſoit le point où IA rencontre le plan de la roue; on pourra donc concevoir la force P appliquée en A; & que cette force s'y

décompoſe en deux autres AB, AD, la première AB verticale, & dans le plan de la roue; la ſeconde AD, perpendiculaire au plan de la roue, & qui par conſéquent, étant parallèle à l'axe du cylindre, ne contribuera en rien à la preſſion des appuis. Quant à la force AB, ſa direction prolongée ſera rencontrée en quelque point F par la direction de la puiſſance; & du concours de ces deux forces, il naîtra la force FO, qui par la condition de l'équilibre devant être détruite, ſera néceſſairement la force abſolue avec laquelle le cylindre eſt porté vers ſes appuis en vertu de la puiſſance Q & du poids P ſuppoſé dirigé ſuivant AE.

Cela poſé, concevons que le point A s'éloigne en s'élevant au-deſſus de l'axe, mais toujours dans le plan IAR. La ligne IA approchera de plus en plus d'être verticale, & la ligne AB approchera auſſi de plus en plus d'être égale à AE; enſorte que quand le point A ſera infiniment éloigné, la direction de la ligne IA ne différera plus de la direction de PS, & AB ſera parfaitement égale à AE; donc en effet la force abſolue avec laquelle l'axe eſt porté vers ſes appuis, eſt la même, lorſque le poids agit en I, que s'il agiſſoit ſuivant la ligne AM, c'eſt-à-dire, dans le plan de la roue.

=756. Mais il faut bien ſe garder d'en conclure que pour avoir la charge particulière de chaque appui, il fût ſuffiſant de décompoſer la force *FO* en deux forces qui lui ſuſſent parallèles, & dont chacune paſsât par chaque appui. Quoique la force *AD* ne contribue en rien à changer les appuis, elle contribue néanmoins à tranſporter le lieu de l'action de la force abſolue *FO*; & quoique dans le cas du parallélíſme, la force *AD* ſoit infiniment petite; néanmoins, comme dans ce même cas elle eſt infiniment éloignée, elle tranſporte l'action abſolue *FO* hors du plan de la roue & de celui dans lequel agit le poids. C'eſt ainſi (en négligeant cependant la conſidération qu'ici la force *AD* & la force *FO* ne ſont pas dans un même plan), c'eſt ainſi, dis-je, que ſi le point *A* (*fig.* 157) étant ſollicité par la force *AC*, il ſurvient une force *AB* perpendiculaire à la première, mais infiniment petite; la force abſolue *AE* qui en réſultera, ne différera pas de *AC*, ſinon d'une quantité infiniment petite; mais le point *F* où cette force rencontrera la ligne *HR*, pourra être éloigné d'une quantité finie, du point *C* où la première direction rencontreroit cette même ligne, ſi le point *A* eſt infiniment éloigné; enſorte que la nouvelle force dirigée ſuivant *AF*, ſera parallèle & égale à *AC*, mais en ſera éloignée d'une quantité finie *FD*.

757. Quant à la diſtribution de la charge à chacun des deux appuis, elle peut avoir pour objet de guider dans l'eſtimation du degré de force qu'on doit donner aux tourillons, & de connoître l'étendue que l'on doit donner à la baſe des montans qui portent le cylindre, afin que la machine ne ſoit pas renverſée.

La manière la plus ſimple pour parvenir à l'un & à l'autre, eſt de décompoſer la puiſſance en deux forces qui lui ſoient parallèles, & dont chacune ſoit dans un plan parallèle à la roue, que l'on concevra par chaque appui.

On décompoſera de même le poids en deux forces qui lui ſoient parallèles, & qui ſoient reſpectivement dans ces mêmes plans paſſant par les appuis; chacune de ces décompoſitions donnera par un calcul très-ſimple, chacune des deux forces compoſantes, d'où doit réſulter la preſſion abſolue de chaque appui, puiſqu'il n'y a autre choſe (205) à faire pour les calculer, que ces deux proportions; la puiſſance eſt à la charge qu'elle occaſionne ſur l'un quelconque des deux appuis, comme la diſtance des deux appuis eſt à la diſtance du plan de la roue, à l'appui dont la charge n'eſt pas l'objet de cette proportion; & le poids eſt à la charge qui en réſulte à l'un des deux appuis, comme la diſtance des deux appuis eſt à la diſtance du plan

dans lequel agit le poids, à l'appui dont la charge n'eſt pas l'objet de cette proportion.

Ayant ainſi déterminé, pour chaque appui, les deux forces compoſantes de ſa preſſion, comme l'angle de ces deux forces compoſantes eſt évidemment le même que celui que la puiſſance fait avec le poids ſuppoſé dans le plan de la roue, il ſera donc très-facile d'avoir la preſſion totale qui en réſulte à chaque appui, & ſa direction. En voici un exemple.

758. Comme le procédé eſt le même, ſoit qu'il n'y ait pas de frottement, ſoit qu'il y en ait, pourvu dans ce dernier cas, qu'on ait préalablement calculé la puiſſance qui doit avoir lieu dans ce cas, je ſuppoſerai tout de ſuite que les dimenſions du tour étant les mêmes que ci-deſſus; on ait trouvé $Q = 105£,6$ comme nous l'avons trouvé en effet (754), P étant ſuppoſé de 1200£. Je ſuppoſe de plus que la diſtance des appuis ſoit de 8 pieds. Que le plan de la roue ſoit éloigné de l'appui à droite (*fig.* 120) de 1 pied, & par conſéquent de 7 pieds de l'appui à gauche. Que le poids ſoit actuellement à 1 pied de la gauche de la roue, & par conſéquent à 2 pieds de l'appui à droite, & à 6 pieds de l'appui à gauche.

J'aurai donc les deux forces compoſantes de la preſſion de l'appui à droite, par ces deux proportions.....

$$8 : 7 :: 105£,6 : x = 92£,4.$$
$$8 : 6 :: 120£ : y = 900£.$$

& les deux compoſantes de l'appui à droite, par ces deux proportions.....

$$8 : 1 :: 105£,6 : x' = 13£,2.$$
$$8 : 2 :: 1200£ : y' = 300£.$$

Préſentement, puiſqu'à cauſe des décompoſitions en forces parallèles, l'angle des deux compoſantes x & y, ainſi que celui des deux compoſantes x' & y', eſt le même que celui de la direction de la puiſſance avec celle du poids conçu dans le plan de la roue; en partant toujours de l'exemple cité, cet angle eſt donc de 50 degrés.

Ainſi concevant (*fig.* 158) le parallélogramme $ABDC$ dont le côté vertical AB ſoit de 900, & dont le côté AC faiſant l'angle BAC de 50 degrés, ſoit de 92,4; la diagonale AD marquera la preſſion de l'appui à la droite, & l'angle BAD ſon inclinaiſon à l'égard de la verticale.

Pareillement, ſi le côté vertical $A'B'$ du parallélogramme $A'B'D'C'$ eſt ſuppoſé de 300, l'angle $B'A'C'$ de 50 degrés, & le côté $A'C'$ de 13,2; la diagonale $A'D'$ marquera la charge de l'appui de la gauche, & l'angle $B'A'D'$ ſon inclinaiſon à l'égard de la verticale.

Or il eſt évident que la connoiſſance de ces quatre quantités, ſe réduit à calculer le côté AD ou $A'D'$, & l'angle BAD ou $B'A'D'$, du triangle ABD ou $A'B'D'$, dont on connoît deux côtés & l'angle compris. Donc (*Géom.* 310) on trouvera $AD = 962£,7$, $BAD = 4^d\ 13'$; $A'D' = 319£,0$; $B'A'D' = 1^d\ 49'$.

759. Dans tout ce qui précède, nous avons négligé le poids du cylindre, de ſon eſſieu, de la

roue & des cordes. Mais comme ces poids peuvent avoir un rapport ſenſible avec le poids P qu'on ſe propoſe d'élever, ils peuvent contribuer ſenſiblement à augmenter le frottement. Voici comment on peut y avoir égard.

760. Pour faire entrer dans cette queſtion tous les élémens dont elle dépend, ſuppoſons que le centre commun de gravité des deux cordons GP & FQ (*fig.* 159) réponde verticalement à un point de GC ou de ſon prolongement, qui ſoit éloigné de C d'une quantité $= g$; que leur poids total ſoit p; que le centre commun de gravité des parties de la corde, tant de celle qui peut être appliquée ſur la roue, que de celle qui peut être actuellement roulée ſur le cylindre, réponde verticalement à un point de GC ou de ſon prolongement, qui ſoit éloigné de C, d'une quantité $= g'$, & que leur poids total ſoit p'. Que P ſoit le poids qu'il s'agit d'élever; P' le poids du tour, c'eſt-à-dire de la roue, du cylindre & de ſon eſſieu, dont je ſuppoſe que le centre commun de gravité ſoit dans l'axe, c'eſt-à-dire, en C.

Nous avons donc cinq forces qui agiſſent ſur le tour, ſavoir p, p', P, P' & Q, leſquelles doivent ſe faire équilibre à l'aide des appuis & du frottement.

Les quatre forces p, p', P & P', étant parallèles, peuvent être réduites à une seule R (219) qui ſera $= P + P' + p + p'$, & qui paſſera à une diſtance $CR = \frac{P \times CG + pg + p'g'}{P + P' + p + p'} = \frac{Pr + pg + p'g'}{P''}$, en faiſant $P + P' + p + p' = P''$, & nommant CG, r.

Cela poſé, concevons que cette force R rencontre la direction de la force Q, en un point A. Il faut donc que du concours de la force R & de la force Q, il réſulte une force dont la direction AM rencontre la ſurface de l'eſſieu en un point où elle faſſe avec cette ſurface, un angle égal à celui du frottement.

Il eſt donc évident que pour avoir la ſolution, eu égard à toutes ces cauſes, il ne s'agit que de mettre dans la ſolution ci-deſſus (752 & 753), CR au lieu de CG, & $P + P' + p + p'$ ou P'' au lieu de P; c'eſt-à-dire de mettre $\frac{Pr + pg + p'g'}{P''}$ au lieu de r, & P'' au lieu de P.

On aura donc $Q = \frac{P'' \text{ ſin. } (a + e)}{\text{ſin. } (b - e)}$, & on calculera tang. a & ſin. e par les formules données (753) en mettant $\frac{Pr + pg + p'g'}{P''}$ au lieu de r. Et dans les valeurs de r & de R, on obſervera de comprendre le demi-diamètre de la corde.

761. Si le frottement eſt nul, on aura l'angle f du frottement, de 90 degrés ; c'eſt-à-dire que la réſultante doit être perpendiculaire à la ſurface de l'eſſieu, & paſſe par conſéquent par le centre C; on a donc alors cof. $f = 0$, & par conſéquent ſin. $e = 0$, ou $e = 0$. La valeur de Q ſe réduit donc à $Q = \frac{P'' \text{ ſin. } a}{\text{ſin. } b}$. Mais en prenant AC pour rayon, on a ſin. RAC : ſin. CAF ou ſin. a : ſin. b : : CR : CF : : $\frac{Pr + pg + p'g'}{P''}$: R; donc $\frac{\text{ſin. } a}{\text{ſin. } b} = \frac{Pr + pg + p'g'}{P''R}$; donc $Q = \frac{Pr + pg + p'g'}{R}$ ou $QR = Pr + pg + p'g'$; c'eſt-à-dire que le moment de Q eſt égal à la ſomme des momens de P & des parties du poids de la corde; ainſi que cela doit être (616) lorſqu'il n'y a pas de frottement.

Et ſi le poids de la corde eſt nul, ou $p = 0$, & $p' = 0$, on a $QR = Pr$ ou $Q : P : : r : R$; ce qui s'accorde avec ce qui a été démontré (676).

762. Cette ſolution convient au levier traverſé par un boulon, tel qu'on le voit (*fig.* 99); en y prenant R & r pour les diſtances des deux puiſſances à l'axe du boulon.

763. Et puiſque la poulie fixe n'eſt autre choſe qu'un tour dans lequel le rayon du cylindre eſt

égal au rayon de la roue ; cette ſolution conviendra donc auſſi à la poulie fixe, en y ſuppoſant $R = r$, & $b = a = \frac{1}{2} A$; enſorte que (760) on aura $Q = P'' \frac{\text{ſin. } (a + e)}{\text{ſin. } (a - e)} = P'' \frac{\text{ſin. } (\frac{1}{2} A + e)}{\text{ſin. } (\frac{1}{2} A - e)}$, ſin. $e = \frac{r'}{r}$ ſin. $\frac{1}{2} A$ cof. f, en obſervant qu'au lieu de r, on doit mettre $\frac{Pr + pg + p'g'}{P''}$.

764. Si la puiſſance Q (*fig.* 159) eſt verticale, alors les angles RAC, CAE, CAF, pouvant être conſidérés comme infiniment petits, on peut au lieu de ſin. $(a + e)$ & ſin. $(b - e)$, écrire ſin. a + ſin. e & ſin. b — ſin. e ; enſorte qu'on aura $Q = P'' \frac{\text{ſin. } a + \text{ſin. } e}{\text{ſin. } b - \text{ſin. } e}$.

Mais nous venons de voir que $\frac{\text{ſin. } a}{\text{ſin. } b} = \frac{Pr + pg + p'g'}{P'' R}$, ou ſin. $b = \frac{P'' R \text{ ſin. } a}{Pr + pg + p'g'}$. Et en conſidérant AC comme rayon, on a auſſi ſin. a : ſin. e :: CR : CE :: $\frac{Pr + pg + p'g'}{P''}$: r' cof. f ; d'où ſin. $e = \frac{P'' r' \text{ ſin. } a \text{ cof. } f}{Pr + pg + p'g'}$; on a donc alors

$$Q = \frac{P'' \left(\text{ſin. } a + \frac{P'' r' \text{ ſin. } a \text{ cof. } f}{Pr + pg + p'g'}\right)}{\frac{P'' R \text{ ſin. } a - P'' r' \text{ ſin. } a \text{ cof. } f}{Pr + pg + p'g'}} = \frac{Pr + pg + p'g' + P'' r' \text{ cof. } f}{R - r' \text{ cof. } f}.$$

765. Donc dans la poulie fixe (*fig.* 160) on a $Q = \frac{Pr + pg + p'g' + P''r' \text{ cos. } f}{r - r' \text{ cos. } f}$.

766. Soit T la tenſion du cordon FP; il eſt évident que $T = P + p''$, p'' étant le poids de ce cordon. Et comme on a $P'' = P + P' + p + p'$, ſubſtituons, pour P & P'', leurs valeurs en T; & nous aurons.....

$Q(r - r' \text{ cos. } f) = Tr + Tr' \text{ cos. } f + pg + p'g' + (P' + p + p')r' \text{ cos. } f - (p''r + p''r' \text{ cos. } f)$

ou $Q = T\left(\frac{r + r' \text{ cos. } f}{r - r' \text{ cos. } f}\right) - \frac{p''(r + r' \text{ cos. } f)}{r - r' \text{ cos. } f} + \frac{pg + p'g' + (P' + p + p')r' \text{ cos. } f}{r - r' \text{ cos. } f}$

$= T\left(\frac{1 + \text{cos. } f}{1 - n \text{ cos. } f}\right) - p''\left(\frac{1 + n \text{ cos. } f}{1 - n \text{ cos. } f}\right) + \frac{\frac{pg + p'g'}{r} + (P' + p + p')n \text{ cos. } f}{1 - n \text{ cos. } f}$ en faiſant $\frac{r'}{r} = n$.

Cette dernière expreſſion nous ſera fort utile pour déterminer l'effet du frottement dans les mouffles.

767. Pour avoir l'effet du frottement dans la poulie mobile; voici comment il faut conſidérer l'équilibre.

Pour que la puiſſance Q (*fig.* 161) ſoit ſus

le point de faire tourner la poulie autour de ſon eſſieu ou boulon C; il faut qu'elle reçoive une augmentation qui la mette en état de ſurmonter le frottement. Or cette augmentation fera que la puiſſance écartera un peu la chappe CP de ſa ſituation primitive, juſqu'à ce qu'elle ait amené le poids P en un point tel que la verticale conçue par le centre commun de gravité du poids, de la chappe & du boulon, faſſe avec la ſurface de celui-ci, un angle égal à celui du frottement. Concevons que ED ſoit cette verticale; nous aurons comme ci-devant (752) $CE = r' \text{ cof. } f$, r' étant le rayon du boulon.

Mais la condition que nous venons d'établir ne ſuffit pas pour l'équilibre. Il eſt évident que les tenſions des deux cordons doivent faire équilibre au poids P, à celui de la chappe, à celui du boulon, à celui de la poulie ſans ſon boulon, & enfin à celui de la corde entière.

Suppoſons donc que le centre commun de gravité des deux cordons QG, FT paſſe à une diſtance connue g de la verticale menée par le centre C; que le poids de ces deux cordons ſoit p; que le centre de gravité de la partie de corde appliquée ſur la poulie, paſſe à la diſtance g' de la verticale menée par C, & que le poids de cette partie de corde ſoit p'; que P ſoit le poids compoſé de celui qu'on doit élever, de celui de la chappe, & de

celui du boulon; P' le poids de la poulie ſans le boulon.

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que la réſultante des poids P, P', p, p', ſoit égale & directement oppoſée à la réſultante des tenſions des deux cordons.

Or il eſt facile de voir (219) que la réſultante des poids P, P', p, p' ſera $P + P' + p + p'$ que je repréſente par P'', & qu'elle paſſera à une diſtance $CI = \frac{P \times CE + pg + p'g'}{P''} = \frac{P r' \text{ cof. } f + pg + p'g'}{P''}$; donc la verticale qui paſſe par I, doit auſſi paſſer par le point de concours O des deux cordons. Et puiſqu'il y a équilibre, on doit (201) avoir $Q : P'' : T ::$ ſin. IOT : ſin. QOT : ſin. QOI.

Soit a l'angle QOT, e l'angle COI, on aura $QOI = QOC - COI = \frac{1}{2}a - e$, & $IOT = \frac{1}{2}a + e$; donc $Q : P'' : T ::$ ſin. $(\frac{1}{2}a + e)$: ſin. a : ſin $(\frac{1}{2}a - e)$; & par conſéquent $Q = \frac{P''\text{ ſin. }(\frac{1}{2}a + e)}{\text{ſin. } a}$, & $Q = \frac{T\text{ ſin. }\frac{1}{2}(a+e)}{\text{ſin. }(\frac{1}{2}a - e)}$.

768. Quant à l'angle e, on le déterminera facilement, en obſervant que ſi on prend AC pour

pour rayon on a $CG : CI ::$ fin. $COG :$ fin. COI; c'eſt-à-dire, $r : \frac{P r' \text{ cof. } f + p g + p' g'}{P''} :: \text{fin. } \frac{1}{2} a$: fin. e, & par conſéquent fin. $e = \ldots\ldots\ldots$ $\frac{P r' \text{ cof. } f + p g + p' g'}{P'' r} \text{ fin. } \frac{1}{2} a$.

769. Suppoſons préſentement que les cordons ſont parallèles, & par conſéquent verticaux; l'angle e & l'angle a étant alors infiniment petits, on aura fin. $a = 2$ fin. $\frac{1}{2} a$; fin. $(\frac{1}{2} a + e) =$ fin. $\frac{1}{2} a +$ fin. e, & fin. $(\frac{1}{2} a - e) =$ fin. $\frac{1}{2} a -$ fin. e.

Les deux valeurs de Q trouvées ci-deſſus, deviendront donc $Q = \frac{1}{2} P'' (1 + \frac{P r' \text{ cof. } f + p g + p' g'}{P' r})$

$= \frac{1}{2} P'' (1 + \frac{P n \text{ cof. } f + \frac{p g + p' g'}{r}}{P'' r})$ en faiſant $\frac{r'}{r} = n$; & $Q = T (\frac{P'' + P n \text{ cof. } f + \frac{p g + p' g'}{r}}{P'' - P n \text{ cof. } f + \frac{p g + p' g'}{r}})$

ou chaſſant le dénominateur, & tranſpoſant $+ (Q - T) P'' - (Q + T) P n$ cof. $f - (Q + T) \frac{p g + p' g'}{r} = 0$. Or les cordons étant parallèles, on a $Q + T = P''$; donc toute cette équation eſt diviſible par P'', & donne $Q - T - P n$ cof. $f - \frac{p g + p' g'}{r} = 0$. Mais puiſqu'on a $Q + T = P''$, on a auſſi

$Q + T = P + P' + p + p'$; donc $P = Q + T - P' - p - p'$; donc $Q - T - Q n \text{ cos. } f - T n \text{ cos. } f + (P' + p + p') n \text{ cos. } f - \frac{pg + p'g'}{r} = 0$; d'où l'on tire $Q = T \frac{(1 + n \text{ cos. } f)}{1 - n \text{ cos. } f} - \frac{(P' + p + p') n \text{ cos. } f}{1 - n \text{ cos. } f} + \frac{\frac{pg + p'g'}{r}}{1 - n \text{ cos. } f}$.

Cette valeur de Q va nous être utile pour les mouffles. Quant à la valeur.....

$Q = \frac{1}{2} P'' \left(1 + \frac{P n \text{ cos. } f + \frac{pg + p'g'}{r}}{p''}\right)$, elle ſert à trouver Q immédiatement par la connoiſſance des poids P, p, p'', &c.

770. De-là, & de ce qui a été dit (766) ſur la poulie fixe, concluons donc que T étant la plus petite tenſion, & Q la plus grande, on a, dans le cas des cordons parallèles, pour la poulie fixe, $Q = T \left(\frac{1 + n \text{ cos. } f}{1 - n \text{ cos. } f}\right) - p'' \left(\frac{1 + n \text{ cos. } f}{1 - n \text{ cos. } f}\right) + \frac{\frac{pg + p'g'}{r} + (P' + p + p') n \text{ cos. } f}{1 - n \text{ cos. } f}$; & pour la poulie mobile, $Q = T \left(\frac{1 + n \text{ cos. } f}{1 - n \text{ cos. } f}\right) + \frac{\frac{pg + p'g'}{r} - (P' + p + p') n \text{ cos. } f}{1 - n \text{ cos. } f}$.

Telles ſont les formules que l'on doit calculer pour avoir la valeur de la puiſſance, eu égard au poids de toutes les parties de la machine.

Si le poids des cordes & des poulies eſt fort petit à l'égard des tenſions des cordons ; alors on pourra négliger les termes où entrent les quantités P', p, p' & p'', & l'on aura pour la poulie fixe comme pour la poulie mobile, $Q = T\left(\frac{1+n\cos.f}{1-n\cos.f}\right)$, les cordons étant ſuppoſés parallèles.

771. Voyons maintenant à appliquer ces principes aux mouffles.

Raiſonnons ſur la *figure* 83 ; il ſera facile d'appliquer ce raiſonnement à toute autre diſpoſition de poulies.

Nous ignorons quelle eſt la tenſion du cordon 1, & nous la repréſenterons par T. Nous ſuppoſerons que T', T'', T''', &c. repréſentent conſécutivement les tenſions des autres cordons ; que n, n', n'', &c. repréſentent auſſi, pour chaque poulie, ce que nous avons repréſenté par n dans la formule.

Cela poſé, on aura pour le rouet embraſſé par les cordons 1 & 2, $T' = T\left(\frac{1+n\cos.f}{1-n\cos.f}\right)$.

Pour le rouet embraſſé par les cordons 2 & 3, $T'' = T'\left(\frac{1+n'\cos.f}{1-n'\cos.f}\right)$.

Pour le rouet embraſſé par les cordons 3 & 4, $T''' = T'' \left(\frac{1 + n'' \text{ cof. } f}{1 - n'' \text{ cof. } f}\right)$.

Enfin pour le rouet embraſſé par les cordons 4 & 5, celui-ci étant ſuppoſé parallèle aux autres, $T^{IV} = T''' \left(\frac{1 + n''' \text{ cof. } f}{1 - n''' \text{ cof. } f}\right)$.

D'où l'on voit que les tenſions T', T'', T''', T^{IV}, ſeront toutes connues, dès qu'on connoîtra la tenſion T du cordon 1.

Or la condition par laquelle cette tenſion doit être déterminée, eſt évidemment que la ſomme des tenſions des cordons 1, 2, 3 & 4, doit être égale au poids P, c'eſt à-dire que $T + T' + T'' + T''' = P$.

Il eſt donc facile de conclure de-là une formule générale pour la valeur de la tenſion du dernier cordon; c'eſt à-dire, de la puiſſance. Mais comme cette formule ne donneroit rien de plus ſimple que le procédé que nous allons enſeigner, & ſeroit d'ailleurs moins facile à retenir, nous paſſons tout de ſuite à ce dernier.

772. Remarquons donc, que ſi on ſubſtitue ſucceſſivement, dans T'' la valeur de T'; dans T''' celle de T'' réſultante de cette première ſubſtitution; dans T^{IV} celle de T''' réſultante de cette ſeconde ſubſtitution, & ainſi de ſuite; on aura, en

général, la tenſion d'un cordon quelconque exprimée par la tenſion T du dernier cordon, multipliée par la ſuite des fractions $\frac{1 + n \text{ cof. } f}{1 - n \text{ cof. } f}$, $\frac{1 + n' \text{ cof. } f'}{1 - n' \text{ cof. } f'}$ relatives aux poulies embraſſées par toutes les parties de la corde, depuis la première juſqu'à celle dont il s'agit. Donc dans l'équation $T + T' + T'' + T''' + T^{IV} + \&c. = P$, le premier membre ſera T multiplié par la ſomme de pluſieurs fractions dépendantes des dimenſions des rouets & de leurs eſſieux. D'où l'on voit que P venant à changer, T changeroit préciſément dans le même rapport, les dimenſions de la machine reſtant les mêmes. Et puiſque T', T'', T''', ſont toutes auſſi exprimées par T multiplié par une quantité différente, pour chacune, à la vérité, mais qui ne varie pas par le changement du poids; T', T'', T''', &c. augmentent donc auſſi proportionnellement au poids.

773. D'après cette remarque, nous établiſſons la règle ſuivante pour calculer l'effet du frottement dans les mouffles, quel que ſoit le nombre des poulies; lorſque le poids de la machine peut être conſidéré comme fort petit à l'égard de celui qu'il s'agit d'élever.

Prenez arbitrairement un nombre quelconque pour repréſenter la tenſion de la première branche de corde, c'eſt-à-dire de celle qui eſt le plus éloignée de la

puiſſance. Calculez ſucceſſivement la tenſion de chaque cordon conſécutif, à l'aide de l'équation $Q = T\left(\frac{1 + n \cos. f}{1 - n \cos. f}\right)$ *dans laquelle* T *repréſente la tenſion ſuppoſée connue,* Q *celle qu'il s'agit de trouver,* n *le rapport du rayon de l'eſſieu à celui du rouet embraſſé par ces deux cordes, &* f *l'angle du frottement.*

Ces tenſions étant calculées, la dernière ſeroit la valeur de la puiſſance qui peut vaincre le frottement, ſi le nombre qu'on a pris arbitrairement pour la tenſion du premier cordon, avoit été bien pris.

Faites une ſomme de celles de ces tenſions qui appartiennent à la mouſle mobile. Puis faites cette proportion... La ſomme de ces tenſions réſultantes de la ſuppoſition qu'on a faite, eſt à la tenſion de l'un quelconque des cordons, réſultante auſſi de cette ſuppoſition, comme le poids total, eſt à un quatrième terme qui ſera exactement la tenſion de ce cordon, & par conſéquent la valeur de la puiſſance, ſi on a pris pour ſecond terme de la proportion, la tenſion du dernier cordon.

774. Appliquons cette règle aux mouffles de la *fig.* 83. Suppoſons que la première branche de la corde eſt attachée à la chappe de la mouffle ſupérieure ; que le rayon de chaque eſſieu eſt le $\frac{1}{2}$ du rayon de ſon rouet, & que le frottement n'eſt que le $\frac{1}{4}$ de la preſſion. Nous

aurons donc $n = \frac{1}{6}$, & (747) le rayon eſt à la tangente de l'angle f du frottement :: 1 : 4; d'où l'on trouvera par les Tables, que l'angle f eſt de $75^d\ 58'$ dont le coſinus ou cof. f eſt de 0,24249; c'eſt-à-dire qu'on a cof. $f = \frac{8}{33}$ à très-peu près. Donc n cof. $f = \frac{4}{99}$, & $\frac{1 + n \text{ cof. } f}{1 - n \text{ cof. } f} = \frac{101}{95}$.

Suppoſons le poids P de 800£, & prenons arbitrairement pour la tenſion du premier cordon, 200£ qui ſeroit ſa tenſion dans le cas où il n'y auroit pas de frottement. D'après ces ſuppoſitions, la formule..... $Q = T\left(\frac{1 + n \text{ cof. } f}{1 - n \text{ cof. } f}\right)$ donne pour la tenſion du deuxième cordon, Q ou $T' = 200£ \times \frac{101}{95} = 216£,84$.

La même formule, en mettant T' pour T, donne pour la tenſion du troiſième cordon, ou $T'' = 200 \times \frac{101}{95} \times \frac{101}{95} = 200 \times \left(\frac{101}{95}\right)^2 = 235£,10$.

Par la même raiſon, mettant T'' pour T, on a la tenſion du quatrième cordon, ou $T''' = 200 \times \left(\frac{101}{95}\right)^3 \times \frac{101}{95} = 200 \times \left(\frac{101}{95}\right)^4 = 254£,90$.

Enfin mettant T''' pour T'', on a pour la tenſion du cinquième cordon, ou pour la puiſſance Q, dans la ſuppoſition actuelle, $Q = 200 \times \left(\frac{101}{95}\right)^5 = 276£,37$.

Ajoutons préſentement les tenſions des cordons 1, 2, 3 & 4, nous aurons 906£,84.

Cela poſé, conformément à la règle (773), je fais cette proportion, 906,84 : 276,37 :: 800 : à un quatrième terme qui eſt 243,81; c'eſt-à dire, que la puiſſance Q qui pourra ſurmonter le frottement, doit réellement être de 243£,81 ou 243£ $\frac{4}{5}$, & non pas de 276£,37 ou 276£ $\frac{3}{8}$.

Si dans la même proportion on met pour ſecond terme

ſucceſſivement la valeur de T, celles de T', T'', & T''', on trouvera pour les valeurs véritables, $T = 176£,44$; $T' = 191£,29$; $T'' = 207£,40$; $T''' = 224£,87$, dont la ſomme eſt en effet $800£$, c'eſt-à-dire égale au poids, ainſi que cela doit être.

775. Mais ſi les poids des différentes parties de la machine ſont comparables aux tenſions des cordons; alors il faudra employer les formules générales ci-deſſus. Nous allons en donner un exemple ſur la chèvre repréſentée par la *fig.* 128; mais auparavant donnons une nouvelle forme à ces formules.

776. Nous avons trouvé, pour la poulie fixe,

$$Q = T\left(\frac{1 + n \cos. f}{1 - n \cos. f}\right) - p''\left(\frac{1 + n \cos. f}{1 - n \cos. f}\right) + \frac{\frac{pg + p'g'}{r}}{1 - n \cos. f} + \frac{(P' + p + p')\, n \cos. f}{1 - n \cos. f};$$

formule dans laquelle $P' + p + p'$ marque le poids de la corde & celui de la poulie, avec ſon boulon, ou ſans ſon boulon, ſelon que celui-ci fait ou ne fait pas corps avec elle; p'' marque le poids du cordon dont on conſidère la tenſion; $pg + p'g'$ marque la ſomme des momens des deux parties de la corde & de l'arc enveloppé, pris par rapport à la verticale qui paſſe par le centre de la poulie.

Donc ſi on nomme D la diſtance du centre de

gravité de toute la corde, à cette verticale, on aura $pg + p'g' = (p + p')\,D$.

Donc en général, si nous représentons par P la somme faite du poids de la poulie (avec son boulon ou sans son boulon, selon que celui-ci fait ou ne fait pas corps avec elle), & du poids de la corde; par p le poids total de la corde; & par q le poids de la branche de corde dont on est censé connoître la tension, on aura $Q = T\left(\frac{1 + n \cos. f}{1 - n \cos. f}\right) - q\left(\frac{1 + n \cos. f}{1 - n \cos. f}\right) + \frac{\frac{pD}{r} + Pn \cos. f}{1 - n \cos. f}$ pour la poulie fixe, les cordons étant parallèles.

A l'égard de la poulie mobile, nous avons trouvé $Q = T\left(\frac{1 + n \cos. f}{1 - n \cos. f}\right) + \frac{\frac{pg + p'g'}{r} - (P' + p + p')n \cos. f}{1 - n \cos. f}$; donc en employant les mêmes dénominations que tout-à-l'heure, pour représenter les mêmes choses, nous aurons $Q = T\left(\frac{1 + n \cos. f}{1 - n \cos. f}\right) + \frac{\frac{pD}{r} - Pn \cos. f}{1 - n \cos. f}$ pour la poulie mobile, les cordons étant parallèles.

777. Donc en représentant par T, T', T'' les tensions des cordons 4, 3, 2 (*fig.* 128); par n, n', n'' ce que devient n pour chaque poulie; par p, p', p'' ce que devient p pour chaque poulie; par P, P', P'' ce que devient P pour chaque

diſtance du centre d'un rouet ſupérieur au centre du rouet inférieur ſoit de 14 pieds $\frac{1}{2}$. Que la force du frottement ſoit le quart de la preſſion, en ſorte qu'on ait comme ci-devant, cof. $f = \frac{8}{15}$.

Cela poſé, le rayon nu de chaque poulie étant de 4 pouces, & celui de la corde 1 pouce, tandis que celui du boulon eſt de $\frac{1}{2}$ pouce, on a $\frac{r'}{r}$ ou $n = \frac{1}{10} = n'$; donc n cof. $f = n'$ cof. $f = \frac{4}{105}$.

La différence de longueur des deux cordons 4 & 3 n'étant que de $\frac{1}{2}$ pied, on peut ſans erreur ſuppoſer que leur centre de gravité tombe ſur la verticale qui paſſe par le centre de la poulie qu'ils embraſſent; ainſi on a $D = 0$. A plus forte raiſon a-t-on $D' = 0$.

Le rayon nu de chaque poulie, & celui de la corde étant enſemble de 5 pouces; la partie de corde qui s'enveloppe ſur chaque poulie ſera de $\frac{22}{7} \times 5^{po}$, ou de $\frac{22}{7} \times \frac{5^{pl}}{12} = \frac{55^{pl}}{42} = 1^{pl},31$; donc la ſomme des deux cordons 4 & 3 qui embraſſent un rouet ſupérieur, eſt de $30^{pl},81$, qui à raiſon de $1£\frac{1}{2}$ par pied, pèſent $46£,21$; & comme ce rouet eſt ſuppoſé peſer $35£$; on a donc $P = 81£,21$.

Les deux cordons 3 & 2 ont de longueur $30^{pl},31$, qui a raiſon de $1£\frac{1}{2}$ par pied, pèſent $45£,46$; ajoutant donc le poids de la poulie inférieure ſans ſes dépendances, on a $P' = 80£,46$.

Enfin le cordon 4 ayant 15 pieds de longueur, doit à raiſon de $1£\frac{1}{2}$ par pied, peſer $22£,5$; on a donc $q = 22£,5$.

Il ne s'agit donc plus que de ſubſtituer toutes ces quantités dans les valeurs ci-deſſus, de T' & T'', & nous aurons

$T' = T \times \frac{169}{161} - 22{,}5 \times \frac{169}{161} + 81{,}21 \times \frac{4}{161}$

Et $T'' = T' \times \frac{169}{161} - 80{,}46 \times \frac{4}{161}$;

C'eſt-à-dire $T' = 1{,}0510\ T - 21{,}6003$,

Et $T'' = 1{,}0510\ T' - 1{,}9990$.

Subſtituant dans celle-ci, la valeur de T' tirée de la première, on aura $T'' = 1{,}1046\ T - 24{,}7009$.

Réuniſſons T, T' T'', & nous aurons..... $T + T' + T'' = 3{,}1556\ T - 46{,}3012$ qu'il faut égaler au poids total M.

Or nous avons pour M; 1°. le poids 1150£ de la pièce; 2°. le poids total des cordons 4, 3 & 2, y compris l'arc enveloppé de la poulie inférieure, le tout montant à 67£,96; 3°. le poids de la poulie inférieure, la chappe, le boulon & le crochet, le tout montant à 47£; donc $M = 1264£{,}96$. Donc $3{,}1556\ T - 46{,}3012 = 1264{,}96$, & par conſéquent $T = \frac{1311{,}2612}{3{,}1556} = 415£{,}53$.

Subſtituant cette valeur de T, dans celle de T' & T'', on aura $T' = 415£{,}12$ & $T'' = 434£{,}29$.

Réuniſſant ces trois valeurs de T, T' & T'', on a $T + T' + T'' = 1264£{,}94$; à 2 centièmes d'unité près de ce qu'on doit avoir.

779. Nous ſavons donc préſentement avec quelle force le cordon 2 agit ſur le cordon 1. Voyons comment nous calculerons la tenſion du cordon 1.

Suppoſons que ce cordon fait, avec la verticale, un angle de 15^d; il fait donc ce même angle avec le cordon 2; ainſi dans ce que nous avons dit (763), & auquel il faut avoir recours à préſent, il faut ſuppoſer $A = 15^d$

Rappelons-nous donc que nous y avons trouvé

$Q = \frac{P'' \text{ sin. } (\frac{1}{2}A + e)}{\text{sin. } (\frac{1}{2}A - e)}$, sin. $e = \frac{r'}{r}$ sin. $\frac{1}{2}A$ cos. f, mais avec cette condition qu'au lieu de r il falloit mettre $\frac{Pr + pg + p'g'}{P''}$.

Rappelons-nous auſſi que P marquoit la force appliquée au cordon vertical, indépendamment du poids de ce cordon; ainſi P marque la tenſion T' diminuée du poids du cordon 2; on a donc $P = 434£,29 - 21£,75 = 412£,54$.

Quant à P'', il eſt la ſomme faite du poids de la poulie ſans ſon boulon, & du poids de la corde 1, 2. Suppoſons que le cordon 1 ait 16 pieds de long, il pèſera $24£$.

Préſentement, pour déterminer le poids total de la corde, il faut avoir la longueur de l'arc qu'elle embraſſe.

Soient donc $e\,h$ & $c\,g$ (*fig.* 162) les deux cordons 2 & 1 de la *fig.* 128, puiſqu'ils forment entre eux un angle de 15^d, l'arc embraſſé $c\,m\,e$ ſera donc de 165^d; or nous avons vu ci-deſſus que les 180^d formoient une longueur de $1^{pi},31$; donc les 165^d valent $1^{pi},20$, qui à raiſon de $1£\ \frac{1}{3}$ par pied, pèſeront $1£,80$, c'eſt la valeur de p'; réuniſſant donc ce poids, avec celui du cordon 2 & celui du cordon 1, on aura $p + p' = 47£,55$. Par conſéquent $P'' = P + P' + p + p' = 412£,54 + 35£ + 47£,55 = 495£,09$.

Déterminons préſentement les quantités g & g'. Le cordon 2 (*fig.* 162) qui pèſe $21£,75$ eſt cenſé agir à la diſtance de 5 pouces ou $\frac{5}{12}$ de pied, de la verticale $d\,s$; ſon moment ſera donc $21,75 \times \frac{5}{12}$.

Quant au cordon 1 qui pèſe $24£$, voyons à quelle diſtance ſon centre de gravité qui eſt dans le milieu n de ſa longueur, paſſe de la même verticale. Menons le

rayon cf, & la perpendiculaire cr ſur la verticale. L'angle cbe étant de 15^d, l'angle cfr ſera de 75^d. Il eſt donc facile dans le triangle rectangle crf, dont le côté cf eſt de $\frac{5}{12}$ de pied, de calculer cr, que l'on trouvera de 0^{pi}, 4025.

Menons la verticale cq terminée par l'horizontale nq; & dans le triangle rectangle cqn, où l'on connoît cn de 8 pieds, moitié de la longueur du cordon 1, & l'angle cnq de 75^d, on trouvera facilement que nq eſt de 2^{pi},0706; donc le centre de gravité n du cordon 1 eſt éloigné de la verticale ds, de 2^{pi},47; donc le moment de ce cordon eſt $24 \times 2{,}47$. Prenant donc la différence des momens $21{,}75 \times \frac{5}{12}$ & $24 \times 2{,}47$ des deux cordons, & la diviſant par la ſomme 45,75 des poids de ces deux cordons, on aura pour la diſtance de leur centre commun de gravité à la verticale, $g = -\frac{50{,}22}{45{,}75} = -1^{pi}{,}10$; c'eſt-à-dire que le centre de gravité des deux cordons 1 & 2 au lieu de tomber du côté du cordon vertical, comme on l'a ſuppoſé dans la ſolution générale, tombe du côté du cordon 1. Déterminons g'.

Le centre de gravité a de l'arc enveloppé cme, doit être ſur le rayon fm qui partage cet arc en deux parties égales, & ſa diſtance fa au centre f ſe déterminera (256) par cette proportion, $cme : ce :: fm : fa$.

Or nous avons déjà trouvé $cme = 1^{pi}{,}2$; nous avons $fm = \frac{5^{pi}}{12}$ & ce ſoutendante de 165^d eſt facile à calculer, & on la trouvera de $0^{pi}{,}83$; on aura donc $fa = 0^{pi}{,}29$.

Menons la perpendiculaire ad ſur la verticale; ad ſera g'. Or l'angle cfm étant de 82^d 30$'$ & l'angle cfd,

de 75^d; l'angle dfa ſera de $7^d\ 30'$; & dans le triangle rectangle dfa ou $fa = 0^{pi},29$, on trouvera facilement $da = 0^{pi},04$; donc $g' = 0^{pi},04$.

Ayant ainſi calculé toutes les quantités qui entrent dans $\frac{Pr+pg+p'g'}{P''}$, ſubſtituons donc ces quantités, & nous aurons

$$\frac{Pr+pg+p'g'}{P''} = \frac{412£,54\times\frac{1}{12}-45£,75\times 1,10+1£,80\times 0,04}{495,09}$$

$= 0^{pi},245$; c'eſt la quantité que nous devons ſubſtituer pour r, dans $\text{ſin. } e = \frac{r'}{r}\ \text{ſin. } \frac{1}{2}A\ \text{cof. } f$.

Et comme nous avons le rayon du boulon $r' = \frac{1}{2}$ pouce $= \frac{1}{24}^{pi}$; & $\text{ſin. } \frac{1}{2}A = \text{ſin. } 7^d\ 30' = 0,13053$, & $\text{cof. } f = \frac{8}{17}$, nous aurons donc $\text{ſin. } e = \frac{1}{24\times 0,245}\times 0,13053\times\frac{8}{17}$ $= 0,00538$ qui répond à $18'\ 30''$; donc $e = 0^d\ 18'\ 30''$, & par conſéquent $\frac{1}{2}A + e = 7^d\ 48'\ 30''$ & $\frac{1}{2}A - e = 7^d\ 11'\ 30''$; donc la tenſion du cordon 1, qui dans la formule générale eſt exprimée par Q; ſera

$$Q = P'' \times \frac{\text{ſin. }(\frac{1}{2}A+e)}{\text{ſin. }(\frac{1}{2}A-e)} = 495£,09 \times \frac{\text{ſin. } 7^d\ 48'\ 30''}{\text{ſin. } 7^d\ 11'\ 30''}$$

$= 495£,09 \times \frac{0,13586}{0,12518} = 535£,73$; ainſi le cordon 1 eſt tendu avec une force de $535£,73$.

780. Il faut préſentement déterminer la force qu'on doit appliquer aux barres E, E. Il s'agiroit donc de recourir à la méthode que nous avons donnée (760) pour le tour. Mais comme dans cette ſolution, nous avons ſuppoſé que l'une des deux forces étoit verticale, nous allons, avant tout, réſoudre la queſtion du tour plus généralement que nous ne l'avons fait (760); ce qui mettra en état de calculer l'effet du frottement pour le tour, dans tous les cas.

781. Suppoſons que NT, MQ (*fig.* 163 & 164) ſoient les directions de deux puiſſances T & Q qui ſe font équilibre ſur le tour, & que T ſoit ſur le point d'entraîner Q, malgré la réſiſtance du frottement augmenté par le poids de la machine; il s'agit de déterminer le rapport de T à Q.

Concevons que BI ſoit une verticale qui paſſe par le centre commun de gravité de toutes les parties peſantes du ſyſtème. Si on nomme P le poids de toutes les parties dont le centre commun de gravité tombe dans l'axe C; p le poids de celles dont le centre de gravité tombe hors de l'axe C; g la diſtance du centre commun de gravité de celles ci, à la verticale qui paſſe par C, on aura $CI = \frac{pg}{P+p}$ (230).

Que la puiſſance Q rencontre la verticale BI au point B. Du concours de ces deux forces, il naîtra une force BS que l'on pourra ſubſtituer à ces deux-là, & qui (216) paſſera à une diſtance

$$CL = \frac{Q \times CM - \frac{pg}{P+p} \times (P+p)}{S} =$$

$\frac{Q \times CM - pg}{S}$ en appellant S cette force.

Or la force Q, l'angle MBI qu'elle forme avec la verticale, & le poids $(P+p)$ qui agit

agit ſuivant BI étant donnés, il eſt très-facile (559) de calculer la force S, & l'angle IBS ou IBL qu'elle forme avec la verticale. On aura donc facilement la valeur de CL, que je nommerai R'; & puiſque l'angle TVI que la direction de la puiſſance T forme avec la verticale, eſt donné, on aura donc facilement l'angle TAL, que la direction de cette puiſſance forme avec celle de S, puiſque $TAL = TVI + IBL$ (*fig.* 163); & $TAL = TVI - IBL$ (*fig.* 164).

La queſtion eſt donc réduite à mettre la force S en équilibre avec la force T. Or il faut pour cela, (A étant le point où ſe rencontrent les directions de ces deux forces) que du concours de ces deux forces il réſulte une force unique AH qui rencontre la ſurface de l'eſſieu en un point D où elle faſſe avec cette ſurface, un angle égal à l'angle du frottement.

Préſentement, AH étant la réſultante des deux forces T & S, on doit (201) avoir $S : T ::$ ſin. TAH : ſin. $HAS ::$ ſin. TAD : ſin. LAD; c'eſt-à dire, (*fig.* 163) $S : T ::$ ſin. $(TAC - CAD)$: ſin. $(CAL + CAD)$; & (*fig.* 164) $S : T ::$ ſin. $(TAC + CAD)$: ſin. $(CAL + CAD)$.

Donc si on appelle b l'angle TAC; a l'angle CAL; & e l'angle CAD; on aura pour la (*fig.* 163), $T = \frac{S \text{ sin.}(a+e)}{\text{sin.}(b-e)}$; & pour la (*fig.* 164) $T = \frac{S \text{ sin.}(a+e)}{\text{sin.}(b+e)}$. Or S est connu. Quant aux angles a, b, e; voici comment on les déterminera.

782. En regardant AC comme rayon, & nommant A l'angle TAL que nous avons enseigné (781) à trouver, on a $CN : CL$: : sin. TAC : sin. CAL; c'est-à-dire, (*fig.* 163) $R : R'$: : sin. $(A - a)$: sin. a : : sin. A cos. a — sin. a cos. A : sin. a, ou (en divisant par cos. a) : : sin. A — tang. a cos. A : tang. a. Donc tang. $a = \frac{R' \text{ sin. } A}{R + R' \text{ cos. } A}$. On connoîtra donc a, & par conséquent $b = A - a$.

Et pour la *fig.* 164, on a $R : R'$: : sin. $(A + a$: sin. a : : sin. A cos. a + sin. a cos. A : sin. a : : sin. A + tang. a cos. A : tang. a; donc tang. $a = \frac{R' \text{ sin. } A}{R - R' \text{ cos. } A}$; & l'on a $b = A + a$. A l'égard de e on a pareillement $CN : CK$: : sin. TAC : sin. CAK; c'est-à-dire, $R : r'$ cos. f : : sin. b : sin. e; donc . . . . . sin. $e = \frac{R' \text{ cos. } f \text{ sin. } b}{R}$.

783. Revenons au calcul de la chèvre (*fig.* 128). Suppoſons le rayon r' du tourillon de 1 pouce $\frac{1}{2}$ ou de $\frac{1}{24}$ de pied; le rayon du cylindre, de 5 pouces, & par conſéquent de 6 pouces ou $\frac{1}{2}$ pied, en y comprenant le rayon de la corde; la longueur de chaque bras E, E, comptée de l'axe, de 4 pieds; le poids du cylindre & de ſes tourillons, de 100^{liv}; le poids total des parties extérieures des barres de 15^{liv}; nous ſuppoſerons qu'il n'y en a qu'une, équivalente en poids.

Suppoſons qu'on ait reconnu par expérience, que la ſituation la moins avantageuſe pour la force motrice, ſoit celle où ſa direction (que je ſuppoſe perpendiculaire à la barre) fait avec le cordon 1, un certain angle; par exemple, un angle de 50 degrés. Ce ſera donc pour cette poſition qu'il conviendra de calculer cette force. Suppoſons enfin que la corde eſt déjà roulée de quelques tours ſur le cylindre; par exemple, de 3 tours $\frac{1}{7}$.

Il faut commencer par déterminer les quantités que (781) nous avons appelées P, p & g.

Le rayon du cylindre augmenté de celui de la corde étant de $\frac{5}{12}$ pied, un tour de corde vaudra $\frac{22}{7}$ de pied; & les trois tours & $\frac{1}{7}$ vaudront $\frac{330}{11}$ de pied, leſquels à raiſon de 1£ $\frac{1}{2}$ par pied, pèſeront $\frac{330}{7}$ ou 15£, 71. De plus, puiſqu'il y a trois tours $\frac{1}{7}$, leſquels valent trois fois 360 degrés, plus 120 degrés; ſi on ſuppoſe que M (*fig.* 165) marque le point où le cordon 1 touche le cylindre, l'extrémité de la corde ſera donc en un point N diſtant de M, d'un arc MON de 120 degrés.

Cherchons donc la diſtance du centre de gravité g de l'arc MON à la verticale CO.

Comme nous avons ſuppoſé que le cordon 1, c'eſt-à-dire,

ici, MV, faiſoit avec la verticale, un angle de 15 degrés, il eſt facile de voir en tirant le rayon MC, que l'angle MCO eſt de 105 degrés; donc ſi on mène le rayon Cr au milieu de l'arc MON de 120 degrés, l'arc Mr étant de 60 degrés, l'arc rO ſera de 45 degrés.

Il eſt donc facile de calculer la ſoutendante MN que l'on trouvera de $0^{pi},8660$; & comme la longueur de l'arc MON eſt de $\frac{22}{7} \times \frac{1}{3}$ ou $\frac{22}{21}$, la diſtance Cg (256) du centre de gravité de cet arc ſera donc de $0^{pi},4133$. Donc par le triangle rectangle Cgu, on trouvera $gu = 0^{pi},2922$. Soit n le centre de gravité du cordon 1 dont M & V ſoient les extrémités; nous avons trouvé ci-deſſus (779) $nq = 2^{pi},0706$; donc en menant la verticale Mt, on a auſſi $nt = 2^{pi},07c6$. Or dans le triangle CMp, rectangle en p, on trouvera $Mp = 0^{pi},4830$; donc $Sn = 1^{pi},5876$.

Comme la barre a auſſi un certain poids, & une certaine longueur, calculons auſſi la diſtance de ſon centre de gravité à la verticale.

Nous avons ſuppoſé que la force qui lui étoit appliquée perpendiculairement, faiſoit avec le cordon 1, un angle de 50 degrés; d'où il s'enſuit que cette barre CE (*fig.* 164) fait avec la verticale un angle de 25^{d}. Soit I le milieu de la longueur de la partie extérieure FE de cette barre, & par conſéquent le centre de gravité de cette partie. Puiſque $CF = \frac{1}{2}^{pi}$, & $CE = 4^{pi}$ on aura $CI = 2^{pi}\frac{1}{4}$; & puiſque l'angle ICP eſt de 25 degrés; on trouvera facilement que $IP = 0^{pi},9509$.

Nous pouvons donc (230) conclure actuellement que le centre commun de gravité des 3 tours $\frac{1}{7}$ de corde, du

cordon MV, & de la partie extérieure EF de la barre, eſt éloigné de la verticale CO, & ſur ſa droite, d'une quantité $= \frac{24£ \times ns - 1£,63 \times gu - 15£ \times IP}{15£,71 + 15£ + 24£} =$

$\frac{24 \times 1,5876 - 1£,63 \times 0,1922 - 15£ \times 0,9509}{54,71} =$

$\frac{23,37}{54,71}$; or $54,71$ eſt ce que (781) nous avons appelé p; & la diſtance que nous venons de déterminer, eſt celle que nous avons appelée g; nous avons donc $g = \frac{23,37}{p}$, & $pg = 23,37$. D'ailleurs ce que nous avons appelé P eſt ici le poids du cylindre & de ſes tourillons, c'eſt-à-dire que $P = 100£$; donc (781) nous aurons dans la *fig.* 164 $CI = \frac{23,37}{154,71}$ & $CL = \frac{Q \times CM - 23£,37}{S} = R'$.

Il faut donc déterminer Q & S.

Nous avons trouvé ci-deſſus (779) qu'au point où le cordon 1 (*fig.* 128) touche le cylindre, ſa tenſion eſt de $535£,73$. C'eſt donc la force avec laquelle ce cordon, ſuppoſé ſans peſanteur, ſeroït tiré dans quelque point de ſa longueur, que ce ſoit. Il faut donc concevoir actuellement, au point où ce cordon touche l'une des poulies ſupérieures, une puiſſance Q de $535£,73$, qui conjointement avec le poids du cordon 1 & de tout le reſte de la machine, fait avec le frottement & les appuis, équilibre à la puiſſance T (*fig.* 163). Ainſi nous avons $Q = 535£,73$.

Il faut préſentement déterminer la réſultante S de la force Q, & du poids total de la machine, dirigé ſuivant la verticale qui paſſe par I; nous calculerons en même temps, l'angle IBS que cette réſultante forme avec la verticale.

Soient donc (*fig.* 166) $AB = 535{,}73$; $AD = 154{,}71$; l'angle EAB de 15 degrés ; & $ABDC$ un parallélogramme. On connoît donc les deux côtés AC, CD, & l'angle compris ACD du triangle ACD. Il s'agit de calculer AD, & l'angle CAD. On trouvera donc $AD = 388{,}39$ & $CAD = 159^{d}\ 5'$; c'eſt à-dire (*fig.* 164) $S = 388£, 39$ & l'angle $IBS = 155^{d}\ 5'$. Subſtituant donc, dans la valeur ci-deſſus de R', $388£, 39$ pour S, $535£, 73$ pour Q; & $\frac{1}{3}$ pour CM, nous aurons $R' = \frac{244{,}49}{388{,}39} = 0^{pi.}, 6295$.

Il ne s'agit donc plus pour avoir T (*fig.* 164) que de calculer les angles A, a, b & e (782). Or l'angle que nous avons appelé A, ou $TAL = TVI - VBS$. TVI étant l'inclinaiſon de la direction de la puiſſance à l'égard de la verticale eſt de 65^{d} d'après les ſuppoſitions que nous avons faites. Et comme nous venons de trouver $IBS = 159^{d}\ 5'$, nous aurons $VBS = 20^{d}\ 55'$; donc $A = 44^{d}\ 5'$; donc ſelon ce qui a été dit (782) nous aurons tang. $a = \frac{R' \text{ ſin. } A}{R - R' \text{ cof. } A}$

$= \frac{0{,}6295 \times \text{ſin. } 44^{d}\ 5'}{4 - 0{,}6295 \times \text{cof. } 44^{d}\ 5'} = \frac{0{,}6295 \times 0{,}6957}{4 - 0{,}6295 \times 0{,}718}$

$= \frac{0{,}43793}{4 - 0{,}46541} = \frac{0{,}43793}{3{,}53459} = 0{,}12390$ qui dans les tables répond à $7^{d}\ 7'$. Donc $a = 7^{d}\ 7'$; & par conſéquent $b = A + a = 51^{d}\ 12'$.

Enfin puiſque (782) on a ſin. $e = \frac{R' \text{ cof. } f \text{ ſin. } b}{R}$, & que cof. $f = \frac{2}{3}$, & ſin. $b = 0{,}77936$; on aura ſin. $e = \frac{0{,}6295 \times \frac{2}{3} \times 0{,}77936}{4} = 0{,}02973$, qui, dans les tables, répond à $1^{d}\ 42'$. Donc $e = 1^{d}\ 42'$; & par con-

ſéquent $a + e = 8^d\ 49'$, & $b + e = 52^d\ 54'$,

Donc, puiſque (782) $T = \frac{S \text{ ſin. } (a + e)}{\text{ſin. } (b + e)}$, on a

$$T = \frac{388£,39 \times \text{ſin. } 8^d\ 49'}{\text{ſin. } 52^d\ 54'} = \frac{388£,39 \times 0,153271}{0,7>758}$$

C'eſt donc à dire, qu'ayant égard au poids du cylindre, des barres, de la corde, des poulies, chappes, crochets, &c. la force néceſſaire pour élever la pièce de 4 (*fig.* 128) à l'aide de la chèvre, doit par rapport au frottement, être de $74£,6$; au lieu que ſans le frottement, & n'ayant point égard à d'autre poids qu'à celui $1150£$, de la pièce qu'il s'agit d'élever, on trouveroit par ce qui a été dit (589 & 676) que la puiſſance ne devroit être que de $47£,9$.

784. Nous avons calculé avec une préciſion qui n'eſt pas abſolument néceſſaire dans la pratique; mais pour être en droit de négliger certaines circonſtances, il faut être en état de juger de l'influence qu'elles peuvent avoir ſur l'objet qu'on a en vue; & le moyen d'acquérir cette faculté, eſt de s'accoutumer à voir d'abord les choſes en toute rigueur. C'eſt ce qui nous a fait juger devoir calculer dans cet exemple, juſqu'aux plus petits objets.

785. La méthode que nous venons d'enſeigner pour calculer le frottement, diffère beaucoup de celle que l'on trouve en divers ouvrages.

Il y en a deux raiſons principales, la première eſt qu'on a coutume de calculer le frottement comme ſi le point du boulon ſur lequel porte la charge au moment où la puiſſance va vaincre le frottement, étoit le même que celui ſur lequel elle porteroit, ſans le frottement.

Cette ſuppoſition ne peut pas introduire une erreur conſidérable dans la valeur de l'augmentation qu'on doit donner à la puiſſance, tant que le rayon du boulon ſera beaucoup plus petit que celui de la poulie ; ainſi la différence des réſultats des deux méthodes, dans ce cas, ne peut que participer médiocrement de cette cauſe.

La ſeconde, dont effet eſt d'autant plus ſenſible que le nombre des poulies eſt plus conſidérable, eſt qu'on ſuppoſe gratuitement que la tenſion du cordon t, par exemple, dans les mouffles (*fig.* 83) eſt la même que s'il n'y avoit pas de frottement ; enſorte qu'on la ſuppoſe plus grande qu'elle n'eſt réellement. Et l'effet de cette ſuppoſition ſe multipliant à proportion du nombre des poulies, la valeur qu'on en conclud pour la puiſſance eſt beaucoup plus grande que ne doit la donner l'hypothèſe de frottement d'où on eſt parti. Auſſi, ſi on ajoute enſemble (774) les tenſions des cordons 1, 2, 3, 4, calculées d'après cette ſuppoſition, trouve-t-on que la ſomme de ces tenſions ſurpaſſe le poids total qu'il s'agit d'élever ; ce qui ne peut avoir lieu, dans l'hypothèſe que l'on fait en même temps, ſavoir, qu'il y a équilibre.

On dira peut-être qu'il n'y a aucun inconvénient à donner a puiſſauce une valeur trop forte. Cela peut être ; mais quand on emploie la théorie, il faut, ſinon qu'elle donne exactement, que du moins quand on n'en voudra tirer qu'une approximation, cette approximation ne ſoit pas le double, ou le triple, ou, &c. de ce qu'on doit avoir. D'ailleurs quand on a calculé, conformément aux conditions de la queſtion, on eſt bien le maître, ſi on veut quelque choſe de plus, de l'ajouter ; & on l'ajoute avec connoiſſance de cauſe.

786. Si on demandoit comment il peut ſe faire que le cordon 1 ſoit moins tendu quand la puiſſance eſt ſur le point de vaincre le frottement, que dans le cas où il n'y auroit pas de frottement. On répondroit que conformément à ce que nous avons dit (767), au moment où la puiſſance fait effort pour rompre l'équilibre, le poids *P* (*fig.* 167) ſe porte du côté de la puiſſance, & s'en approche juſqu'à ce que la verticale qui paſſe par ſon centre de gravité, faſſe avec la ſurface du boulon, un angle égal à celui du frottement. Dans le cas où il n'y a pas de frottement, ce poids agit en *C*, & par-conſéquent ſe diſtribue également aux deux cordons. Mais dans le cas du frottement, ce même poids agiſſant en *I*, ſe diſtribue aux deux cordons *QG* & *TF*, en raiſon de *GF* à *IF* & *GI*; donc le cordon *QG* porte plus dans le cas où il n'y a pas de frottement, & le cordon *FT*, porte au contraire moins.

Ce que nous diſons de la ſeule poulie de la *figure* 167, s'applique tout naturellement aux mouffles; & un raiſonnement ſemblable fait voir que chacun des rouets de la mouffle n'eſt pas également chargé non plus; en ſorte que le boulon prend une petite inclinaiſon à l'horizon. C'eſt ce qu'on peut voir auſſi, en comparant entr'elles les tenſions des cordons que nous avons calculées (774 & 778). Et l'on peut par la comparaiſon de ces tenſions ſe guider dans l'eſtimation de la force qu'on doit donner aux boulons.

787. D'après tout ce que nous venons de dire ſur la manière de calculer la force motrice ſur la poulie fixe, ſur la poulie mobile, ſur les mouffles,

ſur le tour, & ſur quelques machines compoſées de celles-là; & ſur-tout d'après l'exemple que nous venons de donner (778 *& ſuiv.*), il eſt donc aiſé de voir comment on doit ſe conduire dans les autres machines où celles-là entrent. On voit, par exemple, que la grue qui reçoit ſon mouvement par le poids d'un ou pluſieurs hommes qui marchent dans la roue, ſe calculera d'une manière analogue à celle que nous venons d'employer (783) pour le cylindre de la chèvre; en comprenant dans le calcul, le poids de la roue, & employant le poids des hommes comme nous avons employé la puiſſance appliquée aux barres; ce que nous avons dit (751 *& ſuiv.*) ſatisfera pleinement à toutes ces queſtions.

788. Sur le plan incliné; voici comment on déterminera le rapport qu'il doit y avoir entre le poids & la puiſſance, pour que celle-ci ſoit ſur le point de faire gliſſer le corps.

On imaginera, par le point de concours *C* des directions de la puiſſance Q & du poids P (*fig.* 168), la ligne *CI* qui faſſe avec le plan *AB*, un angle *CIA* égal à l'angle du frottement. Pour que la puiſſance Q ſoit ſur le point de faire gliſſer le corps, il faut 1°. que la réſultante de la puiſſance & du

poids ſoit dirigée ſuivant CI; 2°. que le point I où la ligne CI rencontre le plan, appartienne, en même temps, à quelqu'un des points de la baſe RS, ſans quoi le corps tourneroit.

Cela poſé, on aura $P : Q :: \text{ſin. } QCI : \text{ſin. } PCI$; ou, en menant CH perpendiculaire au plan, $::$ ſin. $(QCH - HCI) : \text{ſin. } (PCH + HCI)$ Or l'angle HCI eſt le complément de l'angle du frottement; & les angles QCH & PCH ſont ſuppoſés connus, puiſque nous ſuppoſons que l'on connoît la direction de la puiſſance, & l'inclinaiſon du plan, qui eſt égale à l'angle PCH; on aura donc par-là, le rapport de P à Q.

Si l'on veut déterminer ce rapport, en lignes; on mènera par un point quelconque B du plan incliné, la ligne BT qui faſſe avec AB, l'angle $ABT = HCQ$, & la ligne BV qui faſſe avec AB, l'angle ABV égal à HCI complément de l'angle du frottement. Alors ſi l'on mène l'horizontale AT, on aura $P : Q :: VT : BT$; parce que l'angle $VBT = ABT - ABV = HCQ - HCI$; l'angle $BVT = BAV + ABV = PCH + HCI$; or dans le triangle BVT, on a $VT : BT ::$ ſin. $VBT :$ ſin. BVT.

Au lieu de faire l'angle $ABT = HCQ$, & l'angle $ABV = HCI$, on peut encore mener

BT perpendiculaire à la direction de la puiſſance, & BV perpendiculaire à CI; cela revient au même, & eſt d'ailleurs analogue à ce qu. a été dit (696).

789. Suppoſons, pour donner un exemple, que la puiſſance Q (*fig.* 168) doive faire avec le plan, vers B, un angle de 17^d; que le plan ſoit incliné de 35^d; le poids P de 800£ & le frottement le tiers de la preſſion.

On aura donc $QCH = 73^d$; $PCH = 35^d$. A l'égard de HCI; puiſque le frottement eſt ſuppoſé le tiers de la preſſion, on aura (744) 1 : 3 : : le rayon : tang. CIH ou cof. HCI; d'où l'on conclura que l'angle HCI eſt de $18^d\ 25'$.

Donc (788) $P : Q$: : ſin. $(73^d - 18^d\ 25')$: ſin. $(35^d + 18^d\ 25')$: : ſin. $54^d\ 35'$: ſin. $53^d\ 25'$. Donc $Q = \frac{P \text{ ſin. } 53^d\ 25'}{\text{ſin. } 54^d\ 35'} = 800£ \times \frac{0,80299}{9,81496} = 788£,25 =$ $788£\ \frac{1}{4}$.

Mais ſans le frottement, on auroit eu . . . . . $P : Q$: : ſin. HCQ : ſin HCP : : ſin. 73^d : ſin. 35^d & $Q = \frac{P \text{ ſin. } 35^d}{\text{ſin. } 73^d} = \frac{800£ \times 0\ 57358}{0,95630} = 479£,76 =$ $479£\ \frac{1}{4}$.

Le frottement exige donc, dans ce cas, une augmentation de $308£\ \frac{1}{2}$ dans la puiſſance, pour qu'elle ſoit ſur le point de faire monter le corps en gliſſant.

790. La ſeconde condition que nous venons de voir être néceſſaire pour que la puiſſance Q ſoit

ſur la point de faire gliſſer le corps, fait voir que lorſque le corps n'appuie que par un point, il faut que la direction prolongée de la puiſſance rencontre la verticale menée par le centre de gravité, au point *C* (*fig.* 169) où celle-ci eſt rencontrée par la ligne *IC* qui partant du point de contact *I*, fait avec le plan, un angle égal à l'angle du frottement.

791. On ſe conduira de la même manière pour déterminer les effets du frottement de la ſeconde eſpèce ; de celui qu'il faut vaincre pour faire rouler les corps terminés par des ſurfaces courbes : je dis des ſurfaces courbes ; car pour les corps terminés par des ſurfaces planes, comme ils ne peuvent rouler qu'en tournant ſur une pointe ou partie angulaire, & que les loix & la valeur de ce frottement ne ſont pas ſuffiſamment connues, nous n'en dirons rien pour le préſent. Mais pour ceux dont il s'agit ici, la méthode eſt abſolument la même ; il faut ſeulement obſerver que l'angle du frottement doit alors être ſuppoſé plus approchant de 90 degrés, que dans le frottement de la dernière eſpèce. C'eſt à l'expérience à déterminer cet angle, dans tous les cas.

792. C'eſt à cette ſeconde eſpèce de frottement qu'on a coutume de rapporter celui des roues des voitures, ſur le terrein. Mais le frottement que la roue éprouve au point *D* (*fig.* 170), n'eſt pas

celui qui altère le plus la force motrice. Si l'eſſieu ne frottoit pas dans les boîtes, la réſiſtance qui ſe fait au point *D* de la part du frottement, ſeroit d'un effet preſqu'inſenſible ſur la force motrice, parce que l'eſſieu pouvant alors entraîner la roue ſans la faire gliſſer ſur le terrein, ce mouvement tend à dégager le point *D*.

Mais ſi l'eſſieu en s'appuyant contre le moyeu, y éprouve un frottement ſenſible; alors la roue ne peut tourner qu'autant que la force motrice aura vaincu, tout-à-la fois, le frottement qui ſe fait en *D*, & celui qui ſe fait en *I* contre la ſurface intérieure du moyeu, ou contre les boîtes. Je dis en *I*, c'eſt-à-dire en un point hors de la verticale qui paſſe par le centre de l'eſſieu, & non pas au point où cette verticale coupe la ſurface du moyeu; car il eſt aiſé de voir que dès qu'on ſuppoſe, qu'outre le poids de la voiture, il y a encore une force de traction dirigée ſuivant une ligne quelconque *H A*, la preſſion de l'eſſieu contre le moyeu, doit ſe faire ſuivant une ligne inclinée à l'horizon; & que par conſéquent, l'eſſieu doit appuyer contre le moyeu, en quelque point *I* hors de la verticale qui paſſe par le centre de celui-là.

Examinons de quelle manière la force motrice agit lorſqu'elle eſt ſur le point de ſurmonter le frottement.

793. Suppoſons que *de* (*fig.* 171) ſoit une verticale paſſant par le centre commun de gravité de la voiture de ſa charge, & des roues; que *AB* ſoit la direction ſuivant laquelle la voiture eſt tirée par le cheval; ſur le plan *ab* d'une inclinaiſon quelconque. Nous ſuppoſons, pour plus de ſimplicité, qu'il n'y a qu'un cheval; & comme les deux roues font chacune le même office, nous enviſagerons la queſtion comme s'il n'y avoit qu'une ſeule roue ſituée dans un plan parallèle aux deux roues, & paſſant par le centre de gravité de la voiture; la queſtion réſolue dans cette ſuppoſition, ſera facile à appliquer à l'état réel des choſes.

Quoique nous ſuppoſions, dans la figure ſur laquelle nous allons raiſonner, que le centre de gravité de la voiture, tombe en arrière de l'eſſieu, ce que nous allons dire n'eſt pas moins applicable dans toute autre poſition de ce centre, en faiſant attention au changement que cette poſition peut apporter au ſens dans lequel quelques-unes des forces agiſſent.

Cela poſé, le centre de gravité tombant en arrière de l'eſſieu, il eſt clair qu'une partie de la charge tend à ſoulever le cheval. J'imagine donc, que le poids de la voiture que je puis ſuppoſer appliqué au point *d* de la verticale *de*, ſoit décompoſé en deux forces parallèles *AE*, *PQ*, dont l'une *PQ* n'agira que contre le cheval, & dont

l'autre AE, étant combinée avec la force de traction que je ſuppoſe repréſentée par AB, produira une force moyenne AD qui aura action ſur le cheval & ſur le terrein.

Pour que la force PQ n'ait d'action que contre le cheval, il eſt néceſſaire qu'elle paſſe par le point P où le limon eſt attaché au cheval ; ainſi le point où paſſe cette force eſt connu.

A l'égard de la force AD, tant qu'on ſuppoſe que le frottement n'eſt pas vaincu, la roue & l'eſſieu font corps enſemble ; ainſi elle ſe tranſmet au terrein, par le point d'attouchement K; & au cheval, par le point P.

Soit G le point de contact de la ſurface de l'eſſieu, & de la ſurface interne du moyeu, ou de la boîte. Il faut pour que le frottement ſoit ſur le point d'être vaincu, que la force AD paſſe par le point G, & qu'elle y faſſe avec ces deux ſurfaces, un angle égal à l'angle du frottement. Mais il faut obſerver que cet angle du frottement, n'eſt point celui que nous avons conſidéré (744) pour un corps qui gliſſe ſur un plan. Le point C de l'eſſieu, décrit lors du mouvement, une ligne parallèle au plan $a\,b$; mais le frottement qu'il éprouve n'eſt pas celui qu'il éprouveroit s'il étoit traîné ſur une ſurface plane de même nature que les boîtes & qui auroit la même

inclinaiſon

inclinaiſon que *a b*. Ce frottement n'eſt pas non plus celui qu'il faudroit pour faire tourner la boîte autour de l'eſſieu immobile. C'eſt le frottement d'une ſurface qui ſe meut ſur une autre ſurface qui peut céder. Ainſi l'angle du frottement dont il s'agit, eſt un angle à déterminer par expérience; & il n'y a pas encore d'expériences faites ſur cette eſpèce de frottement.

Quoi qu'il en ſoit, tant que ce frottement n'eſt pas vaincu, toute la voiture eſt donc, ainſi que nous l'avons dit, portée vers le terrein & vers le cheval, en vertu de l'effort *A D*.

Concevons, par le point *K* où la roue touche le plan, une droite *FK* qui ſoit la direction de la partie de l'effort *AD*, qui agit ſur le plan *a b*. Soit *L* le point où elle rencontre *AD* prolongée. Nous pouvons ſuppoſer l'effort *A D* appliqué en *L* ſuivant *ADO*, & repréſenté par *LO* = *AD*. Là cet effort *LO* doit donc ſe décompoſer en deux, dont l'un *LN* ſera l'effort que la roue fait contre le terrein; & dont l'autre *LM*, ne doit plus avoir aucune action contre la voiture.

Mais l'effort *LN* doit être détruit; puiſque par l'hypothèſe, la voiture n'eſt que ſur le point de ſe mouvoir; donc l'angle *FK a* ne doit pas être moindre que l'angle du frottement, ſans quoi la

roue gliſſeroit. Cet angle du frottement dépend de la nature du terrein, des clous des bandes, &c.

Voyons préſentement ce que deviendra l'effort LM qui ne doit plus avoir aucune action ſur la voiture.

Il eſt évident que cette force doit ſe tranſmettre au point P où le limon eſt attaché au cheval. Donc ſi on tranſporte l'effort LM, en PR; & qu'on repréſente par PQ la partie du poids de la voiture qui s'exerce contre le cheval, la diagonale PS du parallélogramme $QPSR$ repréſentera par ſa grandeur & par ſa direction, la réaction de la voiture contre l'action de cet animal.

Soit T le point où PS rencontre la verticale menée par le centre de gravité du cheval; & que TV repréſente ſon poids. Si on conçoit l'action PS tranſportée en TX; du concours des deux forces TV & TX, il réſultera l'effort TY qui eſt celui avec lequel le cheval fait véritablement effort contre le terrein. Il faudra donc puiſqu'on ſuppoſe l'équilibre, que l'effort TV, faſſe avec le plan ab un angle TZb, qui ſoit plus grand que celui du frottement, ſans quoi le cheval gliſſeroit; & il faudra de plus (691) que le point Z tombe entre les quatre pieds du cheval.

794. Telle eſt la manière dont le poids de la

voiture, ſa charge, le poids des roues, & l'action du cheval ſe diſtribuent pour vaincre le frottement. On voit donc que le poids de la voiture, ſoit qu'on ſuppoſe qu'il réponde au-deſſus de l'eſſieu, ſoit qu'il tombe à droite ou à gauche, exerce toujours une certaine action contre le cheval, ſoit pour le ſoulever, ſoit pour l'abaiſſer. Qu'une autre partie AE de ce poids ſe joint à la force de traction, d'où réſulte la force AD qui eſt ſur le point de vaincre le frottement, c'eſt-à-dire, de faire gliſſer l'eſſieu ſur la ſurface interne du moyeu. Que cet effort AD agit, tant contre le terrein, que ſur le cheval, en vertu d'une décompoſition qui ſe fait en L, de cette force AD ou LO, en deux autres dont l'une LN arc-boute la roue contre le terrein, comme contre un point fixe; & l'autre LM ſe tranſmet au cheval au point où le limon lui eſt attaché. Qu'en ce point cette dernière force ſe compoſe avec la partie PQ du poids de la voiture qui agit ſur le cheval, en un effort PS qui rencontrant en T la verticale qui paſſe par le centre de gravité de cet animal, s'y compoſe avec le poids du cheval, & produit l'effort TY en vertu duquel le cheval eſt obligé de s'arc bouter contre le terrein, & de s'incliner en avant, ainſi qu'on le voit faire quand il donne le coup de collier.

795. Le point d où la verticale qui paſſe par le centre de gravité de la voiture & de ſa charge, coupe la direction de la force de traction, eſt cenſé connu, ainſi que le point P où le limon eſt attaché au cheval. Donc ſi le point A étoit connu, on auroit facilement (205) la valeur des forces AE & PQ; & comme l'angle BAE eſt connu; que d'ailleurs CA l'eſt par la ſuppoſition, & que CH perpendiculaire ſur AD, eſt connue auſſi, parce qu'on connoît le rayon CG de l'eſſieu, & l'angle CGA complément de l'angle du frottement; on auroit donc aiſément les angles DAE & DAB, & par conſéquent le rapport de AE à AB; & comme le rapport de AE au poids de la voiture, ſeroit alors connu, on auroit donc le rapport du poids de la voiture, à la force motrice.

796. On voit donc que le rapport du poids de la voiture, à la force motrice, ne dépend que de la poſition du point A. Or parmi les conditions que nous venons de voir être néceſſaires pour l'équilibre, on peut remarquer qu'il en eſt trois auxquelles on peut ſatisfaire d'une infinité de manières. En effet, l'objet eſt ici que la voiture roule, & non pas qu'elle gliſſe, car ce dernier cas exigeroit de la part de la force motrice le plus grand effort poſſible; il ſuffit donc que le point K réſiſte aſſez

pour que le frottement qui ſe fait en G puiſſe être ſurmonté ; ainſi la grandeur de l'angle FKa eſt, ſinon arbitraire, du moins renfermée dans des limites fort étendues. On doit dire la même choſe de l'angle TZb ; & comme le point Z n'eſt déterminé non plus, par d'autre condition, ſinon qu'il tombe entre les pieds du cheval ; on voit donc que le point A peut avoir une infinité de poſitions différentes, ſans que pour cela l'équilibre ſoit rompu.

797. Or comme la poſition du point A fait varier le rapport de la puiſſance au poids ; pour avoir les conditions qui rendront la machine la plus parfaite qu'il eſt poſſible, il faut déterminer le point A par la condition que le rapport qui en réſultera entre la puiſſance & le poids, ſoit le pluspetit qu'il eſt poſſible, c'eſt-à-dire, que la puiſſance ſoit la plus petite poſſible. Déterminons donc le point A par cette condition.

Menons la droite CA, la perpendiculaire CI, ſur la direction de la traction, la perpendiculaire CH ſur AD, le rayon CG de l'eſſieu, & l'horizontale kCn, qui rencontre en n la verticale QP, & en m la verticale TV.

Nommons f l'angle du frottement, dont CGH, eſt le complément ; r le rayon CG de l'eſſieu ; le triangle CHG nous donnera $CH = r$ cof. f.

Nommons la ligne CL qui eſt donnée, a; l'angle donné $IAE = m$; la ligne donnée $Ck = b$; la ligne donnée $kn = c$; & enfin la ligne $AI = x$.

Cela poſé, le triangle rectangle CIA nous donnera $CA = \sqrt{(aa + xx)}$, que pour abréger j'appelle S; ſin. $CAI = \frac{a}{S}$; coſ. $CAI = \frac{x}{S}$, en ſuppoſant le rayon des tables $= 1$.

Comme l'angle $CAE = IAE - CAI$; on aura (*Géom.* 286 & 287) ſin. $CAE = \frac{x \text{ ſin. } m - a \text{ coſ. } m}{S}$; & coſ. $CAE = \frac{x \text{ coſ. } m + a \text{ ſin. } m}{S}$.

Le triangle CAH nous donnera ſin. CAH, ou ſin. $CAD = \frac{r \text{ coſ. } f}{S}$, & coſ. $CAD = \frac{\sqrt{(SS - r^2 \text{ coſ.}^2 f)}}{S}$.

Puiſque $EAD = CAD - CAE$, on aura donc ſin. $EAD = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{r \text{ coſ. } f(x \text{ coſ. } m + a \text{ ſin. } m) - (x \text{ ſin. } m - a \text{ coſ. } m)\sqrt{(S^2 - r^2 \text{ coſ.}^2 f)}}{SS}$; & puiſque ſin. $DAB =$ ſin. $IAD =$ ſin. $(CAI + CAD)$, on aura ſin. $DAB = \frac{a\sqrt{(S^2 - r^2 \text{ coſ.}^2 f)} + r x \text{ coſ. } f}{SS}$.

Nommons Q la force AB, & P′ la force AE; nous aurons donc (201)..... P′ ; Q : : $\frac{a\sqrt{(S^2 - r^2 \text{ coſ.}^2 f)} + r x \text{ coſ. } f}{SS}$

$$\frac{r\cos.f(x\cos.m+a\sin.m)-(x\sin.m-a\cos.m)\sqrt{(S^2-r^2\cos.^2f)}}{SS},$$

& par conſéquent $Q = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$$\frac{P'[r\cos.f(x\cos.m+a\sin.m)-(x\sin.m-a\cos.m)\sqrt{(S^2-r^2\cos.^2f}]}{a\sqrt{(S^2-r^2\cos.^2f)}+rx\cos.f}.$$

Voyons donc quelle eſt la valeur de P'.

D'après la décompoſition que nous avons faite (793) & ce qui a été dit (205) on a, en nommant P le poids total de la voiture, $P : P' :: ln : kn :: kn - kl : kn$; donc $P' = \frac{P \times kn}{kn-kl} = \frac{Pc}{c-kl}$.

Or $kl = kC + Cl = b + Cl$. Mais le triangle CAl donne $Cl = CA \sin. CAE = S \times \frac{x \sin. m - a \cos. m}{S} = x \sin. m - a \cos. m$; donc $kl = b + x \sin. m - a \cos. m$; donc $P' = \frac{Pc}{c-b-x\sin.m+a\cos.m}$; donc enfin $Q = Pc \times \frac{r\cos.f(x\cos.m+a\sin.m)-(x\sin.m-a\cos.m)\sqrt{(S^2-r^2\cos.^2f)}}{(c-b-x\sin.m+a\cos.m)[a\sqrt{(S^2-r^2\cos.^2f)}+rx\cos.f]}$.

Puis donc que Q doit être un *minimum*, il ne s'agit (33) que de différencier ſa valeur, & d'en égaler la différentielle, à zéro.

798. Comme l'équation en x qui réſultera de cette différenciation eſt aſſez compoſée, nous ne pouvons ſans paſſer de juſtes bornes, entrer dans le détail des conſéquences qu'on peut en tirer. Nous remarquerons ſeulement, que ce n'eſt que par la

réſolution de cette équation qu'on peut déterminer quelle eſt la moindre force qu'on doit employer pour mettre la voiture ſur le point de ſe mouvoir.

799. Cependant on peut parvenir à avoir une équation entre Q & les données, ſans réſoudre l'équation en x. On peut par les méthodes de l'Algèbre, éliminer x; à l'aide de l'équation en x réſultante de la différenciation, & de l'équation en x qui exprime la valeur de Q. Alors on aura une nouvelle équation entre Q, & les quantités dont Q dépend; c'eſt-à-dire entre la force motrice, le rayon de l'eſſieu, l'angle du frottement, le poids de la voiture, la diſtance de ſon centre de gravité à l'eſſieu, la diſtance horizontale de l'eſſieu au point du limon où le cheval eſt attaché, la diſtance de la direction de la force de traction à l'eſſieu, & l'angle d'inclinaiſon de cette direction à l'égard de la verticale. Or comme ce dernier angle, & la diſtance horizontale de l'eſſieu au point du limon où le cheval eſt attaché, dépendent de l'inclinaiſon du plan, de la hauteur du cheval, & du rayon de la roue; on aura donc une équation entre Q & tous ces différens élémens, dont on ſent en effet que Q doit dépendre. Et c'eſt par cette équation que l'on pourra juger du rapport des dimenſions des parties de la voiture, pour que la force Q ſoit la moindre qu'il eſt poſſible.

800. On voit donc que la queſtion du tirage, à l'aide des roues, outre les difficultés phyſiques relatives au frottement, n'eſt pas auſſi ſimple qu'on pourroit le penſer d'abord. Et que ce ſeroit, par exemple, s'expoſer à trouver un rapport très-différent du véritable, entre la force motrice & le poids de la voiture, que de comparer leur action à celle d'un poids & d'une puiſſance qui ſe feroient équilibre ſur le plan incliné *a b*, ſans autre moyen que la réſiſtance qui ſe fait en *K*. Dans cette ſuppoſition, la puiſſance & le poids ſeroient en raiſon inverſe des perpendiculaires menées du point *K* ſur leurs directions, quelle que fût d'ailleurs la nature du frottement; puiſque n'y ayant, par l'hypothèſe, que le point *K* qui réſiſte, la réſultante de ces deux forces paſſeroit par le point *K*.

801. Si la voiture au lieu d'être tirée à l'aide d'un limon, l'étoit à l'aide d'une corde; c'eſt alors qu'on pourroit enviſager la choſe comme le ſimple équilibre entre un poids & une puiſſance ſur le plan incliné, parce que la force compoſée réſultante de ces deux forces, qui agit ſur la voiture, ne peut avoir aucune action ſur le cheval; & par conſéquent ſi l'on ſuppoſe qu'il y a équilibre, elle doit paſſer par le point *K*, & la force du frottement de l'eſſieu contre les boîtes, doit être ſupérieure à l'effort qui

tend à les détacher l'un de l'autre ; ſans quoi l'eſſieu tourneroit dans le moyeu ſans déplacement de la roue.

802. Quant un cheval fait effort ſur une voiture pour faire paſſer la roue ſur un obſtacle *r* (*fig.* 171) ; alors la queſtion eſt fort différente. L'objet n'eſt pas de faire rouler la voiture ; mais de l'entraîner toute entière en faiſant tourner toute la voiture, les roues & l'eſſieu, comme ne faiſant qu'un ſeul corps, autour du point *r*. La réſiſtance du frottement de l'eſſieu contre le moyeu, doit donc être aſſez grande pour que leur ſurface commune ne ſe quitte pas pendant cette action ; & alors la force réſultante du poids de la voiture & de l'action du cheval, doit paſſer par le point *r*. Pour lors ces deux forces ſont entr'elles en raiſon réciproque des perpendiculaires menées du point *r* ſur leurs directions. Et comme il eſt évident que la force de traction ſera toujours plus éloignée du point *r*, quand le rayon de la roue ſera plus grand, on voit que les grandes roues, ont à cet égard un avantage réel ſur les petites ; quoique cet avantage ne ſoit pas préciſément dans le rapport du rayon.

Il y auroit beaucoup d'autres choſes à dire ſur cette matière ; mais il doit ſuffire ici que nous ayons fait connoître les principes de la ſolution de

ces ſortes de queſtions. Il eſt aiſé de faire l'application de ce que nous venons de dire, à l'effet du recul ſur les affûts, & aux voitures à plus de deux roues, & attelées de pluſieurs chevaux.

803. Le frottement peut donner lieu à des mouvemens bien différens de ceux qui auroient lieu ſans cette cauſe ; nous allons en examiner quelques-uns.

Nous avons déja dit pluſieurs fois (290) & ailleurs, ce qui devoit arriver à un corps libre *B O Q*, (*fig.* 172) qui recevroit une impulſion ſuivant une direction qui ne paſſeroit pas par ſon centre de gravité. Mais ſi ce corps étoit frappé extérieurement ſuivant une direction quelconque *A B*, il ne recevroit pas toute cette impulſion ; il faudroit décompoſer cette force en deux autres, l'une ſuivant la tangente à la ſurface, l'autre ſuivant la perpendiculaire *B C* à cette ſurface. Dans le cas où il n'y auroit pas de frottement, la force impulſive n'auroit aucun effet ſuivant la tangente, elle ne feroit que raſer la ſurface ; il n'y auroit donc que la force ſuivant *B C* qui ſe tranſmettroit au corps, & qui d'ailleurs ne le feroit tourner que dans le cas où la direction de cette force ne paſſeroit pas par le centre de gravité *G*. D'où l'on voit que ſi le corps étoit ſphérique & d'une matière uniforme,

il ne tourneroit jamais en vertu d'une impulſion extérieure, ſans le frottement; parce que la perpendiculaire à ſa ſurface paſſe toujours par le centre de figure qui eſt en même temps le centre de gravité. Il n'en eſt pas de même dans le cas du frottement; la force ſuivant la tangente, ſe tranſmet à l'aide des aſpérités de la ſurface, en partie d'autant plus grande que la ſurface eſt plus ſuſceptible de frottement; en ſorte qu'outre les mouvemens qui naîtront de la force ſuivant BC, le corps tournera, & le centre G s'avancera parallèlement à la tangente, comme ſi le point B étoit tiré ſuivant cette direction, à l'aide d'un fil attaché en ce point par une puiſſance égale à la force du frottement.

804. Suppoſons que le corps dur & ſphérique ABC (*fig.* 173) tombe librement ſur le plan horizontal HR; & qu'il ait reçu, par quelque cauſe que ce ſoit, un mouvement de rotation autour de ſon centre de gravité; s'il n'y avoit point de frottement, ce corps après avoir rencontré ce plan, ne conſerveroit d'autre mouvement que ſon mouvement de rotation, & ſon centre de gravité demeureroit immobile. Mais s'il y a du frottement, dès que le corps aura touché le plan, il roulera de I vers R, ou de I vers H, ſelon

que ſon mouvement de rotation ſera dans le ſens *CAB*, ou dans le ſens *BAC*; parce que la réſiſtance du frottement qui s'exerce ſuivant le plan, étant équivalente à une force qui agiroit ſur ce corps ſuivant une direction contraire à ſon mouvement, doit, puiſqu'elle ne paſſe point par le centre de gravité de ce corps, lui donner (290) un mouvement parallèle au plan, & un mouvement de rotation, tous deux en ſens contraire à ſon mouvement actuel de rotation; or de ces deux mouvemens, le dernier diminue continuellement le mouvement pritimif de rotation; & au contraire le mouvement du centre s'accélérera, mais juſqu'à un certain terme ſeulement, après quoi il diminuera pour s'éteindre avec le mouvement de rotation.

805. Par-là on explique, aiſément 1°. pourquoi le corps ſphérique *ABC* (*fig.* 174) frappé ſuivant *DB*, après s'être avancé ſuivant *IE*, revient enſuite de *E* vers *I*, & repaſſe même au-delà de *I* vers *F*. L'impulſion ſuivant *DB*, le fait tourner (en vertu du frottement en *B*) ſuivant *ABC*, & avancer ſuivant *IE*; mais le frottement ſur le plan, étant alors un frottement de la première eſpèce, le mouvement du centre de gravité eſt bientôt éteint, & le mouvement de rotation lui en fait naître un autre en ſens contraire, comme dans le cas précédent.

2°. Pourquoi un boulet qui, en tombant, ſemble avoir ſouvent perdu toute ſa force, ſe ranime cependant avec

violence. Lorſqu'il eſt chaſſé par la force de la poudre, il acquiert en frottant ſur la paroi inférieure de l'ame de la pièce, au moment où il ſort, un mouvement de rotation qui ne s'altére que peu en l'air; lors donc qu'il vient à toucher la terre; ſi ſon mouvement de rotation du côté de cette ſurface, ſe fait dans un ſens contraire à ſon mouvement de tranſport, il doit (804) en réſulter une accélération dans le mouvement du centre, c'eſt-à-dire, dans le mouvement de tranſport. Cette cauſe doit être jointe à celles que nous avons expoſées (488 *& ſuiv.*) parmi celles que occaſionnent les ricochets, ou les facilitent; car quand même le centre reſteroit immobile un inſtant, il eſt facile de voir après les conſidérations précédentes, que le mouvement de rotation peut ſouvent ſuffire, pour dégager le boulet, du creux où il ſe ſeroit engagé, en effleurant & labourant la terre.

806. Au reſte, ſi le frottement eſt nuiſible dans beaucoup d'occaſions, il eſt encore plus ſouvent utile. Sans le frottement, ſur la moindre inclinaiſon ſur laquelle nous marcherions, nous tomberions. Jamais un homme ou un animal courant rapidement & tournant en même-temps, autour d'un point fixe *C* (*fig.* 175), ne pourroit s'empêcher de tomber, quelque ſituation qu'il prît; au lieu qu'en vertu du frottement, il peut s'incliner le côté, vers le point *C* autour duquel il tourne, & faire par-là, que ſa peſanteur dirigée ſuivant la verticale *G K* qui paſſe par ſon centre de gravité *G*, & la force centrifuge *C F* qu'il acquiert en tournant, laquelle eſt dirigée de *C* vers *F*, s'accordent à produire une force unique ſuivant une ligne *G I* qui paſſe par un point *I* entre les jambes de l'animal; alors cette force, quoiqu'oblique, ne ſera pas moins détruite

par le frottement, pourvu que l'inclinaiſon ſoit telle que le frottement l'exige.

807. C'eſt au frottement même qu'on doit l'avantage de pouvoir diminuer ce qu'il a de nuiſible; puiſque ce n'eſt que par le frottement qu'on parvient à uſer & à polir les ſurfaces des corps. C'eſt au frottement qu'on doit la facilité de rendre les parties de certaines machines, tantôt fixes, tantôt mobiles. C'eſt par le frottement, que les ciſeaux, & autres inſtrumens tranchans de cette nature, les pinces, tenaillles, limes, &c. font leur effet. Si les lames des ciſeaux, par exemple, n'étoient point des ſcies armées de très-petites dents qui s'engagent dans les petites cavités des corps que l'on doit couper, ces corps gliſſeroient entre les deux tranchans.

808. Le frottement aide encore très-ſouvent à mouvoir les corps dans certains ſens; c'eſt ainſi que lorſqu'à l'aide du levier AB (*fig.* 176) on veut ſoulever le corps P, on y parvient facilement en le faiſant porter ſur ſon arête CD; le frottement alors très conſidérable, rend CD immobile, l'empêche de gliſſer. La même cauſe fixe l'extrémité A du levier. Dans ce cas ſi l'on veut ſavoir quel eſt le rapport du poids P à la puiſſance Q (ce que nous avons différé (621) d'expoſer) on imaginera la peſanteur de P qui eſt dirigée ſuivant la verticale GK qui paſſe par ſon centre de gravité G, décompoſée en deux forces parallèles,

l'une qui passe par le point I où le corps appuie sur le levier, l'autre qui passe par un point de CD, situé dans le plan des deux parallèles GK & IM; alors la force qui en résulte en I, sera à $P :: EK : EM$ (205); & si de A on mène sur IM la perpendiculaire AL, la force Q sera à la force $I :: AL : AB$; d'où l'on conclura que $Q : P :: AL \times EK : AB \times EM$. Au reste, ce n'est qu'à cause du frottement qui a lieu au point I, que nous regardons la force suivant IM, comme transmise entièrement au levier. Sans ce frottement, le levier ne recevroit que la partie de cette force, qui s'exerceroit suivant la perpendiculaire à AB.

809. Il nous reste à considérer le frottement d'une corde roulée sur une surface courbe ABC (*fig.* 177) & tirée à ses deux extrémités par deux puissances. Soient ab, ad, deux côtés consécutifs de la courbe formée par la corde. Ayant prolongé ces deux côtés, concevons que ac, ae représentent les tensions de ces deux côtés. En imaginant le parallèlogramme $acfe$, af marquera la force qui résulte de ces tensions, & celle par conséquent qui est sur le point de faire glisser la corde. Il faut donc que af fasse avec la surface courbe, un angle caf égal à l'angle du frottement.

Cela

Cela posé, soit nommée T la tension du côté ab qui est le plus tendu, $T - dT$ sera celle du côté ad. On aura donc $T : T - dT :: \text{sin. } fae : \text{sin. } fac :: \text{sin. } (cae - fac) : \text{sin. } fac :: \text{sin. } cae \text{ cos. } fac - \text{sin. } fac \text{ cos. } cae : \text{sin. } fac$. Mais $cae = 180^d - cah$; donc (*Géom.* 279) sin. cae = sin. cah, & cos. cae = — cos. cah; or l'angle cah étant infiniment petit, on a cos. $cah = 1$. Donc $T : T - dT :: \text{sin. } cah \text{ cos. } fac + \text{sin. } fac : \text{sin. } fac$; donc T sin. $fac = T$ sin. cah cos. $fac + T$ sin. $fac - dT$ sin. $cah \times$ cos. $fac - dT$ sin. fac; ou, en supprimant de part & d'autre T sin. fac, & omettant comme on le doit, le terme dT sin. cah cos. fac, qui, à cause que l'angle cah est infiniment petit, rend ce terme infiniment plus petit que dT sin. fac, on aura dT sin. $fac = T$ sin. cah cos. fac, ou dT tang. $fac = T$ sin. cah en divisant par cos. fac.

Concevons (55) les rayons de la développée ar, dr aux points a & d. L'angle cah sera égal à ard, puisque ar, dr sont perpendiculaires sur ab, ad ou ah; or dans le triangle rectangle rda, en nommant R le rayon ra de la développée, s la longueur Pba de la corde, & $- ds$ le petit

côté ad, parce que T croiſſant, s diminue ; on a $R : -ds :: \text{ſin. } ard \text{ ou ſin. } cah : 1$. Donc ſin. $cah = \frac{-ds}{R}$; donc dT tang. $fac = \frac{-Tds}{R}$. Mais tang. $fac =$ tang. f, en appellant f l'angle du frottement ; donc dT tang. $f = \frac{-Tds}{R}$, ou $dT = \frac{-Tds}{R \text{ tang. } f}$. C'eſt-là l'équation qui ſervira à déterminer la force T avec laquelle la corde eſt tendue en un point quelconque de la longueur s, tant en vertu de la force P qui lui eſt appliquée, qu'en vertu du frottement.

810. Si le frottement étoit nul ; alors l'angle du frottement ſeroit de 90^d ; tang. f ſeroit donc infinie ; & par conſéquent la valeur de dT ſeroit infiniment petite, c'eſt-à-dire $= 0$. La corde ſeroit donc tendue également dans tous ſes points, & cela doit être en effet (569.

811. Nous nous bornerons à faire uſage de cette équation, pour les cordes roulées ſur des ſurfaces cylindriques.

Pour ces ſortes de ſurfaces, le rayon R de la développée eſt conſtant & égal au rayon de la ſection circulaire du cylindre. L'équation $dT = \frac{-Tds}{R \text{ tang. } f}$,

ou $\frac{dT}{T} = \frac{-ds}{R\,\text{tang.}\,f}$, eſt donc facile à intégrer, & donne log. $T = \frac{-s}{R\,\text{tang.}\,f} + C$.

Pour déterminer la conſtante C, il faut remarquer qu'au point m où la corde quitte la ſurface, la tenſion T devient égale à la force P. Soit donc a la longueur de la partie mP; il faut donc que lorſque $s = a$, on ait $T = P$. On aura donc log. $P = \frac{-a}{R\,\text{tang.}\,f} + C$; & par conſéquent $C = \text{log. } P + \frac{a}{R\,\text{tang.}\,f}$. Donc log. $T = \text{log. } P + \frac{a-s}{R\,\text{tang.}\,f}$, ou log. $P - \text{log. } T = \frac{s-a}{R\,\text{tang.}\,f}$, ou enfin log. $\frac{P}{T} = \frac{s-a}{R\,\text{tang.}\,f}$; ce qui donne le rapport de la tenſion T à la force P, en un point quelconque de la corde.

Pour appliquer ceci à un exemple, ſuppoſons dans la *figure* 121, que la réſiſtance du fardeau P tende la partie de corde qui, en le tirant, touche le cylindre, avec une force de 3000£. Que le rayon du cylindre ſoit de 6^{po}; le rayon du cable de 1^{po}; en ſorte que nous devons ici, prendre pour R, 7^{po}. ou $\frac{7}{12}$ de pied. Que la corde faſſe quatre tours autour du cylindre. On demande quelle eſt la force T néceſſaire pour empêcher la corde de gliſſer ſur le cylindre, en ſuppoſant que le frottement ſoit le quart de la preſſion, ce qui donne tang. $f = 4$?

Il eſt facile de voir que les quatre tours de corde, feront une longueur de $\frac{44^{pi.}}{3}$. On a donc $s - a = \frac{44}{3}$; $P = 3000£$, $R = \frac{7}{12}$, & tang. $f = 4$.

Donc log. $\frac{P}{T}$ = log. $\frac{3000}{T} = \frac{\frac{44}{3}}{\frac{7}{12} \times 4} = \frac{44}{7}$. Mais comme ce logarithme eſt hyperbolique ; pour trouver $\frac{P}{T}$ par le moyen des tables ordinaires, il faut (88) multiplier ſon logarithme $\frac{44}{7}$, par 0,4342945, & l'on aura log. $\frac{3000}{T}$ = 2,7298511 ; ou log. 3000 — log. T = 2,7298511 ; donc log. T = log. 3000 — 2,7298511 = 3,4771213 — 2,7298511 = 0,7472702 qui dans les tables répond à 5,59 ou 5 $\frac{1}{5}$; donc $T = 5£\frac{1}{5}$; donc une force de $5£\frac{1}{5}$ ſuffira, à l'aide du frottement des quatre tours de corde, pour empêcher la corde d'un pouce de rayon, de gliſſer ſur le cylindre de 6 pouces de rayon, le frottement étant le quart de la preſſion, & l'effort qu'elle doit arrêter étant de $3000£$.

812. Mais comme cette ſolution ſuppoſe que la corde touche exactement la ſurface dans tous ſes points, elle donneroit l'effet du frottement beaucoup plus grand qu'il ne doit être, ſi on y employoit le même angle du frottement que l'on auroit déterminé pour faire gliſſer une ſurface ſur une autre. Comme il ne ſeroit pas facile de déterminer directement le rapport de la partie qui touche, à la totalité des vides que laiſſent les torons de la corde, voici comment à l'aide de la formule

précédente, on pourra ſuppléer à ce défaut de connoiſſance ; nous avons trouvé que f repréſentant l'angle du frottement néceſſaire pour mettre une partie quelconque de la corde ſur le point de gliſſer ; nous avons trouvé, dis-je, que la corde étant ſuppoſée toucher le cylindre par tous ſes points, on auroit $\log. \frac{P}{T} = \frac{s-a}{R \text{ tang. } f}$, P étant la force qui tend la corde à l'un des points où elle touche le cylindre ; T la force qui tend tout autre point de la corde appliquée ſur le cylindre ; & enfin $s - a$ la partie de corde compriſe entre ces deux points.

Suppoſons donc que l'on ait paſſé ſur un cylindre d'un rayon connu (*fig.* 178) une corde $pABCq$, de même diamètre que celle dont il s'agit ; & qu'à l'une des extrémités on ait appliqué un poids connu q ; que l'on charge ſucceſſivement l'autre extrémité juſqu'à ce que le poids p ſoit ſur le point de faire gliſſer la corde ; il eſt clair qu'en nommant b la longueur de la partie enveloppée ABC, r le rayon du cylindre, y compris celui de la corde ; on aura $\log. \frac{q}{p} = \frac{b}{r \text{ tang. } f}$; d'où l'on conclura $\text{tang. } f = \frac{\frac{b}{r}}{\log. \frac{q}{p}}$.

Ayant ainſi déterminé par expérience la valeur

de tang. f, on calculera la valeur de T, pour chaque cas, précisément comme dans l'exemple ci-dessus.

De la roideur des Cordes.

813. La roideur des cordes, ou la difficulté qu'on éprouve à les faire plier selon une courbure donnée, est encore une des causes qui diminuent l'effet des forces appliquées aux machines.

Pour se former une idée de la manière dont cette roideur préjudicie aux effets des forces, représentons-nous que le tambour ou la poulie ABC (*fig.* 175) est mobile autour de l'essieu R, sans aucun frottement; les deux poids P & Q étant égaux, si l'on augmente tant soit peu l'un des deux, le poids Q, par exemple, le mouvement ne s'ensuivra qu'autant que la corde $PABCQ$ sera parfaitement flexible. En effet, concevons que la corde $PABCQ$, au lieu d'être parfaitement flexible, ne le soit point du tout, enforte que les parties AP, CQ soient des verges roides & solidement liées au corps de la poulie; il est clair que si l'on force la poulie de se mouvoir suivant ABC, les deux poids P & Q prendront les situations P' & Q'; mais qu'ils tendront à revenir à leur première situation, & qu'il faudra une force particulière pour les maintenir dans cette nouvelle situation. Si donc la corde n'est

ni parfaitement inflexible, ni parfaitement flexible, on voit que ce que le défaut de flexibilité parfaite occaſionnera, ſera que le point A (*fig.* 180) paſſant en A', & le point C en C', les parties AP, CQ, ſe courberont un peu, & de manière que le poids P ſera plus loin de R, & le poids Q plus près, que ſi la corde étoit parfaitement flexible; en ſorte que pour obliger les parties $A'O$, CC' de devenir tangentes aux points A & C, il faudra que la force qui tend à faire tourner, augmente; en un mot, il faudra employer une force qui n'auroit pas lieu ſans ce défaut de flexibilité.

814. La poulie étant toujours ſuppoſée parfaitement mobile ſur ſon eſſieu R, ſi au lieu d'une corde on emploie un ruban; alors, la plus légère augmentation dans le poids Q feroit tourner la poulie. Mais ſi l'on met enſuite une corde, on verra qu'il faut augmenter la puiſſance Q, & l'augmenter d'autant plus 1°. que la ſomme des deux poids P & Q, ou en général, que la charge totale qui tend la corde, ſera plus conſidérable; parce, que toutes choſes d'ailleurs égales, la réſiſtance que les deux poids P & Q font ſentir, lorſque par la roideur de la corde ils prennent les ſituations $A'OP'$, $CC'Q'$, eſt d'autant plus conſidérable que ces poids mêmes le ſont davantage.

2°. L'augmentation qu'il faudra donner à Q, doit être d'autant plus grande auſſi que la poulie, ou en général la ſurface ſur laquelle la corde s'enveloppe, ſera d'un plus petit rayon. Car il eſt viſible que la difficulté que la puiſſance éprouve, venant de ce que la corde au lieu de s'appliquer contre la ſurface, à meſure que celle-ci tourne, en reſte éloignée à une certaine diſtance, en prenant une courbure $P'OA'$ qui forme un certain angle $OA'A$ avec la ſurface ; cette difficulté ſera d'autant plus grande que la courbure $A'O$ que la corde prend par ſon défaut de flexibilité, différera plus de la courbure de la ſurface : or plus le rayon de la ſurface ſera petit, & plus cette différence ſera grande.

3°. La puiſſance doit encore être augmentée à proportion de ce que le diamètre de la corde ſera plus conſidérable. En effet, on ſent aiſément que la corde ſe fléchira d'autant moins qu'elle ſera plus groſſe ; or nous venons de voir que la réſiſtance que la puiſſance éprouve eſt d'autant plus grande qu'il y a plus de différence entre la courbure de $A'O$, & la courbure de $A'A$; elle eſt donc d'autant plus grande que $A'O$ pourra moins s'éloigner de la ligne droite ; c'eſt-à-dire, d'autant plus grande que le diamètre ou le rayon de la corde eſt plus grand.

815. Suppoſons que k ſoit l'augmentation qu'il

faut donner à une puiſſance pour vaincre la réſiſtance provenante de la roideur des cordes, lorſque la force totale qui tend la corde eſt P, que le diamètre de la corde qui porte ce poids eſt D, & que le rayon de la ſurface ABC eſt R. Si l'on veut ſavoir ce que doit être cette augmentation, lorſque le poids ſera p, le diamètre de la corde d, & le rayon de la ſurface r; on obſervera, d'après ce qui vient d'être dit, que s'il n'y avoit de différence que dans le poids total qui tend la corde, on auroit cette augmentation, par la proportion $P : p :: k$ eſt à un quatrième terme, qui ſeroit $\frac{pk}{P}$. Mais ſi outre la différence dans le poids, il y en a auſſi dans les courbures des ſurfaces ; alors ſelon la ſeconde obſervation, qui fait voir que les augmentations provenantes de cette cauſe, ſont en raiſon inverſe des rayons des ſurfaces, l'augmentation dûe à cette cauſe, & au changement de poids, ſera le quatrième terme de cette proportion $r : R :: \frac{pk}{P}$ eſt à un quatrième terme qui ſera $\frac{pRk}{Pr}$. Enfin pour déterminer ce qui ſeroit dû aux trois cauſes réunies, ayant égard à la troiſième obſervation, on calculera le quatrième terme de cette proportion, $D : d :: \frac{pRk}{Pr}$ eſt à un quatrième terme, qui ſera $\frac{pRkd}{PrD}$. En ſorte que

la réſiſtance dans le premier cas, ſera à la réſiſtance, dans le ſecond, $:: k : \frac{pRkd}{PrD}$ ou $:: PrD : pRD$, ou $:: \frac{PD}{R} : \frac{pd}{r}$; c'eſt-à dire, que les réſiſtances proventantes de la roideur des cordes, ſont comme les poids qui tendent ces cordes, multipliés par les diamètres de ces mêmes cordes, & diviſés par les rayons des ſurfaces ſur leſquelles elles doivent être roulées.

Au reſte, ces concluſions ne ſont pas bien rigoureuſes; mais on peut les regarder comme ſuffiſantes dans la pratique, en attendant que l'expérience ait éclairci davantage cette matière: l'expérience fait voir en effet que la réſiſtance dûe à la roideur des cordes ſuit à peu près cette loi; mais toutes les expériences qui ont été faites ſur cette matière, n'ont pas encore un accord tel qu'on pourroit le deſirer. Ce qu'on peut faire de mieux, eſt de s'appliquer à rendre les cordes plus ſouples qu'elles ne le ſont. Voyez l'excellent *Traité de la Corderie*, de M. Duhamel, tant pour cet objet que pour la force & les autres qualités des cordes.

De la manière d'eſtimer les Forces appliquées aux machines.

816. Nous avons déjà dit pluſieurs fois, que la meſure d'une force quelconque, étoit le produit

de la multiplication d'une masse déterminée, par la vîtesse que cette force est capable de lui donner. Il est à propos d'ajouter ici quelques éclaircissemens sur l'application de ce principe à la mesure des forces appliquées aux machines.

Lorsque deux poids agissent l'un sur l'autre, à l'aide d'une poulie simple & fixe; il faut, ainsi que nous l'avons vu, pour qu'ils se fassent équilibre, que leurs masses soient égales; & cet équilibre peut durer éternellement.

Mais si au lieu d'opposer un poids à un poids, on oppose la force d'un animal, celle d'un homme, par exemple; quoiqu'il soit bien vrai que pour l'équilibre, cet homme ne doive employer qu'un effort égal au poids qu'il a à soutenir, c'est-à-dire, un effort égal à la quantité de mouvement qui résulte de la masse de ce corps multipliée par la vîtesse que la pesanteur lui donne dans un instant; il est clair, néanmoins, que si cet homme n'étoit capable que d'un pareil effort, l'équilibre ne dureroit qu'un instant, parce que la pesanteur renouvelle au second instant, l'action qui a été détruite dans le poids, au premier instant.

Ce n'est donc pas par la masse seule que l'homme soutient, qu'on doit juger de sa force; il faut né-

ceſſairement faire entrer encore dans la meſure de cette force, le nombre de fois qu'il eſt capable d'exercer une action égale à celle que la peſanteur fait paſſer à chaque inſtant, dans le poids. Or ſi p repréſente la vîteſſe que la peſanteur eſt capable de donner en une ſeconde de temps, à un corps libre; & dt une portion infiniment petite d'un temps quelconque t; pdt ſera (173) la vîteſſe qu'elle donne pendant l'inſtant dt, t étant ſuppoſé compté en ſecondes. Donc ſi M eſt la maſſe qu'il s'agit de ſoutenir, $Mpdt$ ſera ſon poids, ou la quantité de mouvement que la peſanteur lui donne à chaque inſtant dt; c'eſt donc auſſi l'effort que ſera obligée d'exercer à chaque inſtant, la force qui doit ſoutenir la maſſe M, ſoit immédiatement, ſoit à l'aide d'une poulie. Donc pendant un temps quelconque t, cette force aura dû conſommer une quantité de mouvement égale à $\int Mpdt$, c'eſt-à-dire, $= Mpt$. Donc ſi t marque le temps au bout duquel l'agent n'eſt plus en état de ſoutenir la maſſe M, on pourra regarder Mpt comme étant la meſure de ſa force. Surquoi il faut obſerver, que nous n'entendons pas par-là, qu'il ne ſera plus capable d'exercer aucun effort; mais ſa force étant devenue inférieure à l'effet qu'il s'agit de produire, eſt alors cenſée nulle quant à cet effet.

Par exemple, ſuppoſons que pour ſoutenir un

poids de 50 livres pendant une heure de temps, on veuille employer une force que l'on ſache d'ailleurs être telle qu'agiſſant par degrés égaux & infiniment petits, elle peut parvenir à faire naître dans une maſſe de 20 livres une vîteſſe qui ſoit de 50 pieds par ſeconde, au moment où cette force ſera épuiſée : je vois qu'alors cette maſſe de 20 livres auroit une quantité de mouvement $= 20^{\text{£}} \times 50 = 1000$. Voyons donc ſi cette quantité de mouvement eſt au moins égale à ce que devient la quantité Mpt, en y mettant 50 livres pour M, 1 heure ou 3600 ſecondes pour t, & 30,2 pieds (172) pour p : il eſt évident qu'il s'en faut de beaucoup ; donc une pareille force ne ſoutiendroit pas le poids de 50 livres pendant une heure. Si l'on veut ſavoir pendant quel temps, ou quel nombre de ſecondes elle le ſoutiendroit, il n'y a qu'à ſuppoſer $Mpt = 1000$; & mettant 50 pour M, & 30,2 pieds pour p, on aura $t = \frac{1000}{50 \times 30,2} = \frac{1000}{1510} = \frac{100}{151} = \frac{2''}{3}$ à peu près ; c'eſt-à-dire, qu'une pareille force ne ſoutiendroit un poids de 50 livres que pendant $\frac{2}{3}$ de ſeconde, à peu près.

817. Suppoſons, maintenant, qu'il s'agit non-ſeulement de ſoutenir la maſſe M pendant un temps t,

mais encore de la mouvoit pendant ce temps, avec une vîteſſe uniforme & connue, u.

Il eſt clair que pour que l'agent ait pu faire naître dans le mobile M, ſoit ſucceſſivement, ſoit ſubitement la vîteſſe u; il a dû conſumer une quantité de mouvement $= Mu$; & pour entretenir cette vîteſſe u pendant le temps t, il a fallu qu'il lutte pendant ce même temps contre la peſanteur, de la même manière que ſi le corps eût été en repos; c'eſt-à-dire (816) qu'il a dû, en outre, conſumer une quantité de mouvement $= Mpt$; donc pour entretenir le mobile M avec la vîteſſe u pendant le temps t, l'agent doit être capable de produire une quantité de mouvement $= Mu + Mpt$.

818. L'expérience a fait voir que ſi l'on applique un homme à la manivelle Q d'un treuil tel que celui de la *figure* 121, il peut agir pendant huit heures, & faire faire à la manivelle 30 tours par minute, en ſuppoſant 1°. que le rayon du cylindre & celui de la manivelle ſont égaux, & chacun de 14 pouces; 2°. que le poids appliqué à la ſurface du treuil eſt de 25 $\mathcal{L}$. Cette expérience détermine la valeur de $Mu + Mpt$, & par conſéquent ce au-delà de quoi on ne doit point compter dans l'évaluation de la force d'un homme

appliqué à une machine, & qui doit agir pendant un certain temps. En effet, puiſque le rayon de la manivelle & celui du cylindre ſont égaux, le poids fait ici le même chemin que la puiſſance. Ainſi puiſque ce rayon eſt de 14 pouces; à chaque tour, la puiſſance parcourt $28 \times \frac{22}{7}$ ou 88 pouces; & puiſqu'elle fait 30 tours par minute, à chaque ſeconde elle décrit donc 44 pouces, ou $\frac{44}{12}$ de pied; c'eſt-à-dire, que la vîteſſe $u = \frac{44}{12} = \frac{11}{3}$. La maſſe $M = 25£$, $p = 30^{pi},2$ & $t = 8^h = 28800''$. Les ſubſtitutions faites dans $Mu + Mpt$, on a $Mu + Mpt = \frac{275}{3} + 21744000 = 21744092$. C'eſt par ce nombre qu'on pourra juger ſi avec la force d'un homme, on peut attendre tel ou tel effet que l'on ſe propoſe.

Par exemple, ſi l'on demande s'il eſt poſſible qu'un homme appliqué à la même machine que dans cet exemple, puiſſe mouvoir un poids de $60£$ avec une vîteſſe de 10 pieds par ſeconde, pendant 6 heures, on verra qu'on ne doit pas y compter. En effet, ici on auroit $M = 60£$; $u = 10$; $p = 30,2$; $t = 21600''$; ce qui donneroit: $Mu + Mpt = 600 + 39139400 = 39139800$ qui ſurpaſſant de beaucoup 21744092, fait voir qu'un ſeul homme travaillant continuellement pendant ſix heures, n'eſt pas capable d'un pareil effort.

819. Dans tout ceci, nous avons fait abſtrac-

tion du frottement. Lorſque la machine a atteint l'uniformité, qui eſt l'état où il convient de conſidérer les machines, l'effet du frottement doit être conſidéré comme conſtant, & on peut le comparer à une nouvelle maſſe qu'il s'agiroit de mouvoir avec la maſſe propoſée. Ainſi, dans le même cas que ci-deſſus, ſuppoſant que le frottement équivaut au poids d'une partie connue $\frac{n}{m}$ de la maſſe M, cette réſiſtance exigera de la part de la puiſſance une quantité de mouvement $= \frac{n}{m} Mpt$; en ſorte que $Mu + \frac{n}{m} Mpt + Mpt$, ou $Mu + \left(\frac{n}{m} + 1\right) Mpt$, ſera la meſure de la force motrice.

Dans l'expérience ci-deſſus, quoique l'Auteur qui la rapporte (Deſaguilliers, *Cours de Phyſique Expérimentale*, *Tome II*, *page 594*) n'ait point parlé de l'effet du frottement, on doit penſer qu'il le comprend tacitement dans le réſultat de l'expérience. Si donc on ſuppoſe qu'eu égard à ce que l'axe a dû être d'un rayon beaucoup plus petit que celui du cylindre, le frottement ait été la douzième partie du poids, il faudra en négligeant Mu, comme on le peut ici, augmenter le nombre 21744000, de ſa douzième partie; & alors la force d'un homme, en pareilles circonſtances, doit être

être repréſentée par le nombre 23556000. On voit donc que pour être en état de donner une eſtimation ſuffiſante de la force d'un homme, il faut préalablement s'aſſurer du rapport de la force du frottement, à celle du poids, dans l'expérience que l'on fait dans la vue de déterminer cette force. Alors ſi k eſt la valeur que cette expérience donne pour $\left(\frac{n}{m} + 1\right) M p t$, on aura $\left(\frac{n}{m} + 1\right) Mpt = k$, en négligeant Mu; c'eſt à-dire, lorſque u eſt petit par rapport à pt. Cette équation ſervira à juger dans toute autre ſuppoſition ſur la valeur de $\frac{n}{m}$, ſi la force d'un homme ſuffira pour mouvoir le poids M, pendant le temps propoſé t. On doit raiſonner de même pour la force du cheval ou de tout autre animal. On eſtime qu'un cheval peut, par un travail ſoutenu pendant pluſieurs heures, faire autant que ſept hommes; en ſorte que la force d'un homme étant évaluée à $25^{\text{£}}$, celle d'un cheval doit être eſtimée de $175^{\text{£}}$.

820. Dans tout ce que nous venons de dire, nous avons regardé l'agent, comme s'il agiſſoit immédiatement ſur le poids, & comme s'il ne tiroit aucun avantage des circonſtances locales & des machines. Pluſieurs circonſtances peuvent ſou-

vent permettre de compter ſur un effet plus grand qu'il ne réſulteroit des ſeules conſidérations que nous venons d'expoſer. Par exemple, dans l'uſage de la poulie, un homme peut ajouter à ſa propre force, le poids de ſon corps, ou une bonne partie de ce poids; & il y a beaucoup d'autres circonſtances & de machines, où il peut s'en aider. Souvent le mouvement n'eſt pas continu, mais ſe fait par repriſes comme il arrive dans la poulie; & s'il y a de la perte de temps, il peut y avoir auſſi un bénéfice en ce que par les repos alternatifs, l'agent peut être plus long-temps capable de la même action. Nous ne nous arrêterons point à ces détails dont il ſera toujours facile de tenir compte, en ſuivant l'eſprit de ce que nous venons de dire, & ſur-tout en s'appuyant ſur des expériences, dans leſquelles on ait eu ſoin de diſcuter ce qui appartient à chacune des cauſes dont l'action de la force motrice dépend.

821. Quoique nous n'ayons conſidéré que le cas où le poids tranſmet toute ſa réſiſtance à la puiſſance, il n'en eſt pas moins facile, d'après ce que nous avons dit ſur le rapport du poids à la puiſſance, dans chaque machine, de déterminer de même, ſi à l'aide de telle ou telle machine, une puiſſance propoſée, produira un effet propoſé.

Par exemple, dans le treuil, ſi le rayon du cylindre eſt r, & celui de la roue, R; pour que le poids ſe meuve avec la vîteſſe u, il faut que la puiſſance y ait employé une quantité de mouvement $\frac{Mur}{R}$; & puiſque pendant le temps t, l'action de la peſanteur fait paſſer dans le corps M, la quantité de mouvement Mpt, la puiſſance doit employer à ſoutenir cet effort, la quantité de mouvement $\frac{Mptr}{R}$; enfin ſi le frottement eſt équivalent à la partie $\frac{n}{m}$ de la maſſe M ſuppoſée appliquée à la diſtance r, la puiſſance aura encore à employer la quantité de mouvement $\frac{n}{m}\,\frac{Mptr}{R}$, enſorte que pour juger ſi la puiſſance pourra mouvoir avec la vîteſſe u, pendant le temps t, la maſſe M, ſur un treuil dont le rayon du cylindre ſeroit r, & celui de la roue, R; il faudra déterminer, par expérience, la valeur de $\frac{Mur}{R} + (\frac{n}{m} + 1)\,\frac{Mptr}{R}$, en appliquant à un treuil de dimenſions & d'un frottement connus, un moteur qui meuve une maſſe connue; & obſervant le temps pendant lequel ce moteur peut continuer ſon action; alors ſi k eſt la valeur qu'on aura trouvée en mettant pour M, u; r, R, $\frac{n}{m}$, & t, les valeurs que ces

quantités ont eues dans l'expérience; il faudra dans tout autre cas, que $\frac{Mur}{R} + (\frac{n}{m} + 1)\frac{Mptr}{R}$ n'ait pas une valeur plus grande que k.

822. Pareillement, ſur le plan incliné, la puiſſance tirant parallèlement, au plan, avec une vîteſſe u; ſi on appelle i l'inclinaiſon du plan, Mpt ſin. i ſera (426) la quantité de mouvement que la peſanteur fera paſſer ſucceſſivement dans le mobile ſuivant la direction du plan, pendant le temps t; ainſi la puiſſance aura dû employer une quantité de mouvement $= Mu + Mpt$ ſin. i; & ſi le frottement eſt une partie $\frac{n}{m}$ du poids, elle aura dû employer une quantité de mouvement $= Mu + Mpt$ ſin. $i + \frac{n}{m} Mpt$. Ayant donc déterminé, par expérience, une valeur de $Mu + Mpt$ ſin. $i + \frac{n}{m} Mpt$, il faudra lorſqu'on voudra déterminer ſi la même puiſſance peut mouvoir une maſſe déterminée M, avec une vîteſſe connue u, pendant un temps connu t, ſur un plan dont l'inclinaiſon eſt i & ſur lequel le frottement eſt une partie connue du poids; il faudra, dis-je, examiner ſi la valeur qu'aura alors $Mu + Mpt$ ſin. $i + \frac{n}{m} Mpt$ eſt plus

petite, que celle de l'expérience, ou tout au plus égale; & alors la choſe ſera poſſible.

Si le temps t, pendant lequel la machine doit être en mouvement, n'étoit pas donné; mais que l'on connût l'eſpace que la puiſſance ou le poids doit parcourir; par exemple, celui que le poids doit parcourir avec la vîteſſe u; alors comme on ſuppoſe que le mouvement eſt uniforme, ſi l'on appelle E l'eſpace qu'on a deſſein que le poids parcourre, on mettroit au lieu de t ſa valeur $\frac{E}{u}$ (156).

Telle eſt, en ſubſtance, la manière dont on doit ſe conduire dans l'évaluation des forces appliquées aux machines. Chaque machine peut exiger des conſidérations particulières, eu égard à la nature de l'agent, & à la manière dont il peut être appliqué à cette machine. Mais c'eſt toujours en remontant à la quantité de mouvement que cet agent doit conſumer, qu'on eſtimera s'il eſt capable d'un effet propoſé; & les principes que nous venons d'expoſer pourront guider utilement dans ces recherches.

APPENDICE

Où l'on traite plus particulièrement du mouvement des projectiles dans un milieu réſiſtant.

823. NOUS avons donné (501 *& ſuiv.*) un premier eſſai de la manière de déterminer la courbe décrite par les projectiles, dans un milieu réſiſtant; il s'agit actuellement de ſatisfaire à ce que nous y avons promis; ſavoir, de donner à l'équation un plus grand degré d'exactitude, & d'avoir égard à la variation de denſité. Avant que d'entrer dans la diſcuſſion de l'un & de l'autre de ces deux points, il eſt à propos de fixer, d'une manière plus poſitive que nous ne l'avons fait (515 *& ſuiv.*) quel eſt le véritable effet de notre première approximation ſur les portées.

824. Nous avons vu (517) qu'à ne conſidérer que la partie variable de la valeur de dx, l'effet de cette approximation devoit être de rendre les portées trop courtes; mais nous avons obſervé en même temps que comme la conſtante qu'on doit ajouter à l'intégration, dépendoit elle-même

de cette approximation, elle contribueroit, pour la plus grande partie, à compenſer l'erreur réſultante de cette approximation, enſorte que même pour des angles de projection aſſez grands, l'équation donneroit les portées avec aſſez d'exactitude.

L'effet réel de cette conſtante, eſt non-ſeulement de compenſer ce dont la ſuppoſition que nous avons faite, tend à rendre les portées trop courtes; mais encore de les rendre un peu plus grandes qu'elles ne doivent être; & voici comment on peut s'en convaincre.

Reprenons l'équation $\frac{2px}{k^2} = \frac{1}{a} \log. \frac{C - \frac{2a\zeta}{1-\zeta\zeta}}{C - a \text{ tang. } I}$ qui réſulte de l'intégration faite (520).

Quoique dans les très-grandes vîteſſes, C ſoit une fort petite quantité, elle eſt néanmoins toujours plus grande que a tang. I, & par conſéquent, à plus forte raiſon, plus grande que $\frac{2a\zeta}{1-\zeta\zeta}$ dans la branche aſcendante, puiſque $\frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}$ eſt plus petit que tang. I. Donc on peut (87) ſuppoſer $\log. \left(C - \frac{2a\zeta}{1-\zeta\zeta}\right) = -\frac{a}{C} \times \frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta} - \frac{aa}{2CC} \times \frac{4\zeta^2}{(1-\zeta\zeta)^2}$, &c. & $\log. (C - a \text{ tang. } I) = -\frac{a}{C} \text{ tang. } I - \frac{aa}{2CC} \times \text{tang.}^2 I$, &c.

Donc $\frac{1}{a}$ log. $\frac{C - \frac{2a\zeta}{1-\zeta\zeta}}{C - a \text{ tang. } I} = \frac{2px}{k^2} = \frac{1}{C}$ $\left(\text{tang. } I - \frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}\right) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{a}{2CC}\left(\text{tang.}^2 I - \frac{4\zeta^2}{(1-\zeta\zeta)^2}\right) +$ &c. Donc, puiſqu'en ſuppoſant que a conſerve ſa valeur initiale, qui eſt la plus grande qu'il puiſſe avoir dans la branche aſcendante, on ſuppoſe à a une valeur plus grande qu'il ne l'a en effet, il s'enſuit qu'on rend trop grande l'amplitude de la branche aſcendante.

On prouvera de même que la portée eſt augmentée depuis le point de la plus grande élévation, juſqu'au point où la branche deſcendante fait avec l'horizon, un angle égal à l'angle de projection, & qu'enſuite elle eſt diminuée.

825. Il ne faut pas croire cependant que l'erreur qui en réſulte puiſſe être conſidérable. Entre cette méthode & la ſeconde que nous donnerons, & dont l'effet eſt de rendre les portées plus courtes qu'elles ne ſont réellement, la différence ne commence à ſe faire ſentir que pour des vîteſſes très-grandes.

Pour des vîteſſes de projection, telles que le ſuppoſent les épreuves de bombes rapportées ci-deſſous; c'eſt-à-dire, pour des vîteſſes initiales de 4 à 500 pieds par ſeconde, les deux méthodes

ne s'écartent pas l'une de l'autre de 6 toiſes ſur la valeur de la plus grande portée ; & c'eſt ſur les plus grandes portées qu'elles doivent différer le plus.

Quant aux vîteſſes initiales de 14 à 1500 pieds par ſeconde, qui ſont même au-deſſus de celles que les épreuves rapportées ci-deſſous, attribuent aux boulets de 24, chaſſés avec 8£ ½ de poudre, qui eſt l'une des plus fortes charges ; la différence des plus grandes portées, ſelon les deux méthodes, eſt d'environ 100 toiſes ; & comme l'une donne trop & l'autre trop peu, enſorte que l'erreur moyenne de l'une & de l'autre méthode ne peut être évaluée à plus de 50 ou 60 toiſes ; on voit que même pour les plus grandes vîteſſes que donnent les bouches à feu, l'erreur qui peut réſulter de l'une ou de l'autre approximation eſt inférieure à celles que l'on ne peut éviter dans la pratique.

826. Comme la ſeconde méthode de calculer les portées, eſt d'un calcul plus pénible que la première, & que le degré d'approximation qu'elle donne de plus n'eſt pas conſidérable ; on pourroit donc, ſans de grandes erreurs, s'en tenir à la première méthode pour le calcul des épreuves ci-deſſous, dont nous allons bientôt rendre compte.

Mais on peut donner à cette première méthode un degré d'exactitude très-approchant de celui de la ſeconde, en calculant ſéparément la branche aſcendante & la branche deſcendante. D'après le raiſonnement par lequel nous venons de prouver que la première méthode donne les portées totales trop grandes, on verra qu'en calculant ſéparément, comme nous allons l'enſeigner, la branche aſcendante & la branche deſcendante, ſi la partie de l'amplitude qui répond à la première eſt un peu trop forte, la partie de l'amplitude qui répond à la ſeconde ſera un peu trop foible; enſorte que le réſultat ſera très-approchant de celui que donneroit la ſeconde méthode d'approximation, par une voie plus pénible.

C'eſt ainſi que nous nous y ſommes pris pour calculer les portées de boulets, mais en ayant égard à la variation de la denſité.

827. Il paroît très-difficile de donner une méthode directe de l'approximation pour calculer l'effet de la denſité, laquelle puiſſe être appliquée aux cas où le projectile s'élève auſſi haut que le font les boulets de 24 lorſque l'angle de projection eſt fort grand. Mais au défaut de méthodes directes, on peut en employer d'indirectes, & dont

l'exactitude ſoit ſuffiſante pour l'objet dont il s'agit ici.

C'eſt donc à la première méthode d'approximation que nous allons appliquer ce que nous avons à dire ſur la manière d'avoir égard au changement de denſité, mais en prenant ſéparément, pour plus d'exactitude, la branche aſcendante & la branche deſcendante. Nous ferons voir enſuite la ſeconde méthode d'approximation, laquelle donneroit plus rigoureuſement la courbe ſi la denſité étoit conſtante; nous ferons voir auſſi comment dans cette ſeconde approximation on peut avoir égard au changement de denſité; enſorte que par ce moyen on aura des limites fort étroites pour la valeur des portées.

828. Reprenons donc l'équation primitive $\frac{2pdx}{k^2} = -\frac{d\left(\frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta}\right)}{C-\frac{\zeta+\zeta^3}{(1-\zeta\zeta)^2}-\frac{1}{2}\log.\frac{1+\zeta}{1-\zeta}}$ que nous avons trouvée (506). Nommons H l'angle que la courbe fait avec l'horizon en un point quelconque; & nous aurons $\frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta} = \text{tang. } H$, & $\zeta = \text{tang. } \frac{1}{2}H$.

Or $\frac{\zeta+\zeta^3}{(1-\zeta\zeta)^2} = \frac{2\zeta}{1-\zeta\zeta} \times \frac{1}{2}\frac{1+\zeta\zeta}{1-\zeta\zeta} = \frac{1}{2}\text{ tang. } H \times \frac{1+\text{tang.}^2\frac{1}{2}H}{1-\text{tang.}^2\frac{1}{2}H} = \frac{1}{2}\text{ tang. } H \times \frac{\text{cof.}^2\frac{1}{2}H+\text{ſin.}^2\frac{1}{2}H}{\text{cof.}^2\frac{1}{2}H-\text{ſin.}^2\frac{1}{2}H}$

$= \frac{1}{2}$ tang. $H \frac{1}{\text{cos.}^2 \frac{1}{2} H - \text{sin.}^2 \frac{1}{2} H}$; mais (*Géom.* 287) $\text{cos.}^2 \frac{1}{2} H - \text{sin.}^2 \frac{1}{2} H = \text{cos. } H$; donc $\frac{2 + 2^2}{(1-2)^2} = \frac{1}{2} \frac{\text{tang. } H}{\text{cos. } H} = \frac{1}{2}$ tang. H séc. H.

D'un autre côté, log. $\frac{1+2}{1-2} = \text{log.} \frac{1 + \text{tang.} \frac{1}{2} H}{1 - \text{tang.} \frac{1}{2} H}$ = log. tang. $(45^d + \frac{1}{2} H)$.

L'équation de la courbe devient donc $\frac{2 p dx}{k^2} = \frac{- d \text{ tang. } H}{C - \frac{1}{2} \text{tang. } H \text{ séc. } H - \frac{1}{2} \text{log. tang.} (45^d + \frac{1}{2} H)}$, ou $\frac{2 p dx}{k^2} = \frac{- d \text{ tang } H}{C - \text{tang. } H \left[\frac{1}{2} \text{séc. } H + \frac{1}{2} \text{cot. } H \text{log. tang.} (45^d + \frac{1}{2} H)\right]}$.

La quantité $\frac{1}{2}$ séc. $H + \frac{1}{2}$ cot. H log. tang. $(45^d + \frac{1}{2} H)$ est donc ce que nous avons appellé a dans le calcul exposé (519 & *suiv.*), & que nous avons supposé constant & égal à sa valeur initiale. Cette quantité n'est pas constante en effet; mais l'erreur qui peut résulter de cette supposition est petite, ainsi que nous l'avons déja dit, & qu'on peut le voir encore en observant lorsque la vîtesse est fort grande, 1° que l'angle H ne commencera à varier sensiblement qu'après que le boulet a déja décrit une grande partie de son trajet. 2°. Que l'erreur qui peut en résulter sur la valeur de dx n'est pas à beaucoup près proportionnelle à la variation de a; mais qu'après avoir été croissante jusqu'à un certain terme, elle diminue

enſuite juſqu'à s'anéantir, & recroît enſuite, puis diminue juſqu'à s'anéantir, & enfin croît, dans la dernière partie de la branche deſcendante, où elle produit un effet contraire ſur les portées; on verra facilement toutes ces conſéquences, en comparant l'équation $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\,\text{tang. }H}{C - a\,\text{tang. }H}$ à l'équation $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\,\text{tang. }H}{C - \text{tang. }H[\frac{1}{2}\text{séc. }H + \text{cot. }H\text{log. tang. }(45^d + \frac{1}{2}H)]}$ & obſervant que ces deux équations reviennent abſolument à la même dans trois points de la courbe, ſavoir, au point de départ, au ſommet, & au point de la branche deſcendante qui a la même inclinaiſon que le point de départ.

829. Quand la denſité eſt conſtante, l'équation peut donc être repréſentée d'une manière aſſez approchée par l'équation $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{-d\,\text{tang. }H}{C - a\,\text{tang. }H}$ dans laquelle $a = \frac{1}{2}$ séc. $I + \frac{1}{2}$ cot. I log. tang. $(45^d + \frac{1}{2}I)$, I. étant l'angle de projection.

830. Pour la rendre propre à repréſenter la courbe lorſque la denſité eſt variable, je ſuppoſerai qu'elle a la même forme, mais diffère ſeulement par des conſtantes; c'eſt-à-dire, qu'au lieu de ſuppoſer $dx = \frac{\frac{k^2}{2p} x - d\,\text{tang. }H}{C - a\,\text{tang. }H}$ je ſuppoſerai

$dx = \frac{-d\,\text{tang. } H}{A - B\,\text{tang. } H}$. Cette ſuppoſition eſt ici d'autant plus permiſe, que la variation de denſité n'eſt pas conſidérable; enſorte que l'équation dans l'hypothèſe d'une denſité conſtante, & l'équation dans l'hypothèſe d'une denſité qui varie peu, doivent être peu différentes l'une de l'autre. Je repréſente $\frac{2p}{k^2}$ par $2D$. Cela poſé, l'équation générale étant

$$dx = \frac{-\frac{1}{2D} \times d\,\text{tang. } H}{C - \text{tang. } H\left[\frac{1}{2}\text{séc. } H + \frac{1}{2}\text{cot. } H \log.\text{ tang. } (45^d + \frac{1}{2}H)\right]}$$

Je détermine A & B par ces deux conditions. 1°. Qu'au point de départ, la denſité, ou la quantité $2D$ qui lui eſt proportionnelle, ſoit égale à la valeur connue qu'elle doit avoir en ce point. 2°. Qu'au ſommet de la courbe, où $H = 0$. la denſité, ou la quantité $2D$ qui lui eſt proportionnelle, ſoit égale à la valeur qu'elle doit avoir en ce point, & que je repréſente par $2D'$.

J'aurai donc ces deux équations.....

$$\frac{-d\,\text{tang. } H}{A - B\,\text{tang. } I} = \frac{-\frac{1}{2D} \times d(\text{tang. } H)}{C - a\,\text{tang. } I}$$; parce que $a = \frac{1}{2}\text{séc. } I + \frac{1}{2}\text{cot. } I \log.\text{ tang. } (45^d + \frac{1}{2}I)$,

$$\& \frac{-d\,\text{tang. } H}{A} = -\frac{1}{2D'}\frac{d\,\text{tang. } H}{C}.$$

De ces deux équations, je tire.....

$$A = 2CD', \& B = 2Da - \frac{2C(D - D')}{\text{tang. } I}.$$

Les valeurs de A & B étant ainſi déterminées, j'ai donc $dx = \frac{-d\,\text{tang.}\,H}{A - B\,\text{tang.}\,H}$, & par conſéquent $x = C' + \frac{1}{B}\,\text{log.}\,(A - B\,\text{tang.}\,H)$ c'eſt-à-dire $x = \frac{1}{B}\,\text{log.}\,\frac{A - B\,\text{tang.}\,H}{A - B\,\text{tang.}\,I}$, en déterminant la conſtante C' par la condition que $x = 0$, lorſque $H = I$, ainſi que cela doit être.

Comme rien n'exprime, dans cette équation, la variation de la denſité dans la branche deſcendante, nous ne devons l'employer qu'à déterminer l'amplitude de la branche aſcendante. Faiſant donc tang. $H = 0$, ſi on appelle X l'amplitude de cette branche, on aura $X = \frac{1}{B}\,\text{log.}\,\frac{A}{A - B\,\text{tang.}\,I}$ & comme $A - B$ tang. $I = 2D(C - a\,\text{tang.}\,I)$, & que (520) $C - a$ tang. $I = \frac{k^2}{4ph\,\text{cof.}^2 I} = \frac{1}{4Dh\,\text{cof.}^2 I}$; on aura donc $X = \frac{1}{B}\,\text{log.}\,2Ah\,\text{cof.}^2 I$.

831. Avant que de calculer l'amplitude de la branche deſcendante, il faut avoir la valeur de la plus grande ordonnée, ou de la plus grande hauteur à laquelle s'élevera le projectile. Or, on a en général (503) $\frac{dy}{dx} = \text{tang.}\,H$, ou $dy = dx\,\text{tang.}\,H$; donc, puiſque $dx = \frac{-d\,\text{tang.}\,H}{A - B\,\text{tang.}\,H}$

on aura $dy = \frac{-\text{tang. } H\, d(\text{tang. } H)}{A - B \text{ tang. } H} = \frac{d \text{ tang. } H}{B} - \frac{A}{B} \frac{d \text{ tang. } H}{A - B \text{ tang. } H}$; donc $y = C'' + \frac{\text{tang. } H}{B} + \frac{A}{BB} \log. (A - B \text{ tang. } H)$. Et puiſque y doit être zéro lorſque $H = I$, on aura donc $y = \frac{\text{tang. } H - \text{tang. } I}{B} + \frac{A}{BB} \log. \frac{A - B \text{ tang. } H}{A - B \text{ tang. } I}$.

Faiſant donc $H = 0$, & nommant Y la plus grande ordonnée, on aura..... $Y = \frac{-\text{tang. } I}{B} + \frac{A}{BB} \log. \frac{A}{A - B \text{ tang. } I}$; c'eſt-à-dire, $Y = \frac{-\text{tang. } I + AX}{B}$.

Venons à la branche deſcendante.

832. Pour déterminer l'équation de cette branche, j'imagine que le boulet part du ſommet de la courbe, chaſſé horizontalement avec la vîteſſe qu'il y a réellement. L'équation de la courbe, qui eſt généralement $dx =$ ..... $\frac{-\frac{1}{2D} d \text{ tang. } H}{C - \text{tang. } H \left[\frac{1}{2} \text{séc. } H + \text{cot. } H \log. \text{tang.} (45^d + \frac{1}{2} H)\right]}$ ſera, puiſque H eſt négatif, $dx =$ ..... $\frac{\frac{1}{2D'} d(\text{tang. } H)}{C' + \text{tang. } H \left[\frac{1}{2} \text{séc. } H + \text{cot. } H \log. \text{tang.} (45^d + \frac{1}{2} H)\right]}$; C' étant la conſtante qui convient à la vîteſſe initiale

initiale de la projection actuelle. Je suppose donc, à l'imitation de ce que nous avons fait ci-dessus, que cette équation puisse être représentée par $dx = \frac{d\,\text{tang. } H}{A' + B' \text{ tang. } H}$, & je détermine A' & B' par la condition que la densité, ou la quantité $\frac{2p}{k^2}$ qui lui est proportionnelle, soit $2D'$ au sommet, & $2D$ au point de chute.

Représentant donc par a' la valeur de..... $\frac{1}{2}$ séc. $H + \frac{1}{2}$ cot. H log. tang. $(45^d + \frac{1}{2}H)$ au point de chute, j'aurai pour déterminer A', & B', les deux équations suivantes..... $\frac{\frac{1}{2D'}\, d\,\text{tang. } H}{C'} = \frac{d\,\text{tang. } H}{A'}$, & $\frac{\frac{1}{2D}\, d\,(\text{tang. } H)}{C' + d' \text{ tang. } I'}$, $= \frac{d\,\text{tang. } H}{A' + B' \text{ tang. } I'}$, en appelant I' l'angle de chute.

De ces deux équations, on tire $A' = 2\,C'D'$, & $B' = 2\,D\,a' + \frac{2\,C'(D - D')}{\text{tang. } I'}$. Déterminons donc C'.

Nous avons trouvé (504) $\frac{k^2\,dt^2}{2\,dx^2} = C - \frac{\zeta + \zeta^3}{(1 - \zeta\zeta)^2} - \frac{1}{2}$ log. $\frac{1 + \zeta}{1 - \zeta}$; c'est-à-dire, $\frac{k^2\,dt^2}{2\,dx^2} = C - \text{tang. } H[\frac{1}{2}\text{séc. } H + \frac{1}{2}\text{cot. } H \text{ log. tang. } (45^d + \frac{1}{2}H)]$; mais puisque, par l'hypothèse, on peut prendre

$\frac{1}{A - B \text{ tang. } H}$ au lieu de $\frac{1}{2D[C - \text{tang. } H(\frac{1}{2} \text{ séc. } H + \&c.)]}$ on a $\frac{k^2 dt^2}{2dx^2} = \frac{A - B \text{ tang. } H}{2D}$; donc au ſommet de la branche aſcendante, on a $\frac{dt^2}{2dx^2} = \frac{A}{2Dk^2}$.

Pareillement on a, pour la branche deſcendante, $C' + \text{tang. } H (\frac{1}{2} \text{ séc. } H + \&c.) = \frac{k^2 dt^2}{2dx^2} = \frac{A' + B' \text{ tang. } H}{2D'}$; donc, au ſommet, on a $\frac{k'^2 dt^2}{2dx^2} = \frac{A'}{2D'}$ & $\frac{A'}{2D'} = C'$. Donc $\frac{dt^2}{2dx^2} = \frac{A'}{2D'k'^2} = \frac{A}{2Dk^2}$. Mais puiſque $\frac{P}{k^2} : \frac{P}{k'^2} :: D : D'$, on aura $D'k'^2 = Dk^2$; donc $A' = A$, & $C' = \frac{A'}{2D'}, = \frac{A}{2D'}, = C$; donc enfin $A' = 2CD'$; & $B' = 2Da' + \frac{2C(D - D')}{\text{tang. } I'}$.

Nous verrons dans un moment, comment on détermine a' & tang. I'; pourſuivons la recherche de l'équation.

Puiſque $dx = \frac{d \text{ tang. } H}{A' + B' \text{ tang. } H}$, on aura donc $x = \frac{1}{B'} \log. \frac{A' + B' \text{ tang. } H}{A'}$, en obſervant que x doit être zéro, lorſque tang. $H = 0$.

A l'égard de y, on a $\frac{dy}{dx} = -$ tang. H: donc $dy = -dx$ tang. $H = -\frac{\text{tang. } H \, d \text{ tang. } H}{A' + B' \text{ tang. } H} =$

$-\frac{1}{B'}\,d\,\text{tang. } H + \frac{A'}{B'} \times \frac{d\,\text{tang. } H}{A' + B'\,\text{tang. } H}$; donc $y = C'' - \frac{1}{B'}\,\text{tang. } H + \frac{A'}{B'B'}\,\log.\,(A' + B'\,\text{tang. } H)$. Or, lorſque tang. $H = 0$, on doit avoir $y = Y$; donc, $y = Y - \frac{\text{tang. } H}{B} + \frac{A'}{B'B'}\,\log.\,\frac{A' + B'\,\text{tang. } H}{A'}$. Tirant de l'équation en x, la valeur de..... $\log.\,\frac{A' + B'\,\text{tang. } H}{A'}$, & celle de tang. H, & les ſubſtituant dans celle-ci, on aura enfin..... $y = Y + \frac{A'}{B'}\,x - \frac{A'}{B'B'}\,(e^{B'x} - 1)$, e étant le nombre dont le logarithme eſt 1.

Comme Y eſt déterminé par l'équation.... $Y = \frac{AX - \text{tang. } I}{B}$ trouvée ci-deſſus, on aura donc la ſeconde partie x de la portée, ou l'amplitude de la branche deſcendante, en ſubſtituant au lieu de x, dans l'équation qui donne y, ſucceſſivement pluſieurs nombres, juſqu'à ce qu'on en trouve un qui donne $y = 0$.

832. Mais comme A' & B' dépendent de D, D', a, a', tang. I, tang. I', il s'agit de ſavoir comment on détermine ces dernières quantités.

D eſt donné immédiatement par ſa valeur $\frac{p}{k^2}$. A l'égard de D', il eſt à D comme la denſité

au ſommet de la courbe, eſt à la denſité connue au point de départ. Or il eſt plus que ſuffiſant, dans la recherche actuelle, de prendre pour denſité au ſommet de la courbe, celle qui convient à la plus grande ordonnée de la courbe, déterminée dans la ſuppoſition d'une denſité conſtante. Ainſi on déterminera la plus grande ordonnée, par ce qui a été dit (539), & la denſité par ce qui a été dit (341); d'où on conclura facilement D'.

A l'égard de tang. I', il ſuffit de le connoître à peu près; ainſi on peut, en toute ſûreté, prendre pour I' l'angle de chute de la courbe décrite dans la ſuppoſition d'une denſité conſtante; angle que l'on déterminera facilement dès qu'on aura trouvé la portée, dans cette ſuppoſition, par la méthode donnée (519 & *ſuiv.*). Car l'équation $y = x\left(\text{tang. } I + \frac{k^3}{4aph\cos.^2 I}\right) - \frac{k^4}{8a^2p^2h\cos.^2 I}\left(\frac{2apx}{e^{\frac{2apx}{k^2}} - 1}\right)$ que nous avons trouvée (519) pour le cas de la denſité conſtante, étant différenciée, donne

$$\frac{dy}{dx} = \text{tang. } I - \frac{k^2}{4aph\cos.^2 I}\left(\frac{2apx}{e^{\frac{2apx}{k^2}} - 1}\right).$$

Or $\frac{dy}{dx}$ eſt la tangente de l'angle d'inclinaiſon de la courbe à l'horiſon; ce ſera donc la tangente de l'angle de chute, ſi on y met pour x la valeur qui convient à $y = 0$, dans l'équation $y =$

x (tang. I + &c.) — &c. c'eſt-à-dire la portée dans la ſuppoſition d'une denſité conſtante.

La valeur de a' étant ce que devient..... $\frac{1}{2}$ séc. $H + \frac{1}{2}$ cot. H log. tang. $(45^d + \frac{1}{2} H)$ lorſque $H = I'$, on aura donc aiſément a' dès qu'on aura I'; & cette valeur de a' n'exige pas plus de ſcrupule que celle de I'.

833. Comme la valeur de a & celle de a', c'eſt-à-dire, en général comme la valeur de $\frac{1}{2}$ séc. $H + \frac{1}{2}$ cot. H log. tang. $(45^d + \frac{1}{2} H)$ eſt fondamentale dans la recherche actuelle; nous avons jugé devoir en dreſſer la Table ſuivante, qui ne peut manquer d'avoir ſon utilité.

TABLE DES VALEURS de la quantité appelée, a dans le calcul de la réſiſtance de l'air au mouvement des projectiles.

deg.		deg.		deg.	
0.	1,00000	30.	1,05306	60.	1,38017
1.	1,00005	31.	1,05727	61.	1,40616
2.	1,00020	32.	1,06171	62.	1,43429
3.	1,00045	33.	1,06640	63.	1,46484
4.	1,00081	34.	1,07134	64.	1,49807
5.	1,00127	35.	1,07596	65.	1,53433
6.	1,00184	36.	1,08206	66.	1,57402
7.	1,00251	37.	1,08787	67.	1,61759
8.	1,00328	38.	1,09400	68.	1,66562
9.	1,00417	39.	1,10001	69.	1,71872
10.	1,00516	40.	1,10730	70.	1,77772
11.	1,00626	41.	1,11452	71.	1,84355
12.	1,00748	42.	1,12215	72.	1,91740
13.	1,00881	43.	1,13022	73.	2,00071
14.	1,00912	44.	1,13875	74.	2,09531
15.	1,01184	45.	1,14777	75.	2,20349
16.	1,01354	46.	1,15741	76.	2,32824
17.	1,01536	47.	1,16752	77.	2,47344
18.	1,01732	48.	1,17826	78	2,64428
19.	1,01942	49.	1,18973	79.	2,84788
20.	1,02165	50.	1,20189	80.	3,09418
21.	1,02404	51.	1,21483	81.	3,39753
22.	1,02657	52.	1,22862	82.	3,77960
23.	1,02926	53.	1,24333	83.	4,27430
24.	1,03212	54.	1,25903	84.	4,93833
25.	1,03514	55.	1,27583	85.	5,87383
26.	1,03834	56.	1,29381	86.	7,28508
27.	1,04172	57.	1,31310	87.	9,90478
28.	1,04530	58.	1,33382	88.	14,39754
29.	1,04907	59.	1,35612	89.	28,69102
30.	1,05306	60.	1,38017	90.	infinie.

834. Voici donc à quoi ſe réduit le calcul des portées, eu égard à la variation de denſité.

$\frac{\dot{p}}{k^2}$ étant déterminé comme nous l'avons fait (524); h étant donné, ou étant conclu par la méthode expliquée (525), de quelqu'épreuve faite ſous un angle connu, on commencera par calculer la portée, la plus grande ordonnée, & l'angle de chute, dans la ſuppoſition que la denſité ſoit conſtante; ce que l'on fera par ce qui a été dit (520 & 539), & par ce qui vient d'être dit pour l'angle de chute.

La plus grande ordonnée fera connoître la denſité au ſommet de la courbe, par ce qui a été dit (341). On connoîtra donc $2D$, & $2D'$.

A l'égard de C, il eſt toujours facile à calculer, puiſque (519) nous avons trouvé $c = \frac{k^2}{4ph\ \text{cof.}^2 I} + a\ \text{tang.}\ I$.

Par l'angle de projection, on aura a, & par l'angle de chute, on aura a', à l'aide de la Table précédente. On aura donc toutes les quantités qui entrent dans A, A', B & B', & par conſéquent on aura ces quantités elles-mêmes.

On calculera donc l'amplitude X de la branche aſcendante, & ſa plus grande ordonnée Y, à l'aide des équations $X = \frac{1}{B}\ \text{log.}\ 2Ah\ \text{cof.}^2 I$, & $Y = \frac{AX - \text{tang.}\ I}{B}$.

Ces quantités étant calculées, on déterminera l'amplitude de la branche deſcendante, par l'équation..... $y = Y + \frac{A'x}{B'} - \frac{A'}{B'B'}(e^{B'x} - 1)$, en ſubſtituant ſucceſſivement pour x différentes valeurs, juſqu'à ce qu'on en trouve une qui donne $y = 0$. Ce ſera la ſeconde partie de la portée, laquelle étant ajoutée à X, donnera la portée totale.

C'eſt de cette manière que nous avons calculé les portées de boulets que l'on voit dans la ſeconde Table ci-après.

835. Quant aux épreuves de bombes que l'on voit dans la Table ci-jointe, nous les avons toutes calculées ſans aucun égard à la variation de denſité, parce que les hauteurs auxquelles elles ont dû s'élever dans les plus grandes portées, qui ſont celles où l'effet de la variation de denſité eſt le plus ſenſible, ſont trop petites pour exiger ce ſcrupule. Nous les avons donc calculées par la méthode expoſée (520); & leur durée par la méthode donnée (542).

836. Pour mettre en état de juger juſqu'à quel point la ſuppoſition que la courbe décrite eſt une parabole, écarte de l'état réel des choſes, nous avons compris dans cette Table, les portées telles qu'elles auroient dû être ſi l'air ne faiſoit pas de réſiſtance ſenſible. Ayant remarqué, dans le procès-verbal qui a été dreſſé à l'occaſion de ces épreuves, que les portées ſous 10 & ſous 20 dégrés avoient été accompagnées de quelques difficultés de pratique, nous n'avons employé ni l'un ni l'autre de ces angles pour déterminer la force de la poudre, mais nous avons pris la portée moyenne ſous 30 degrés; c'eſt de celle-ci que nous avons conclu, par la méthode expoſée (525), la valeur de h, ou la hauteur dûe à la vîteſſe de projection; c'eſt-à-dire la force de la poudre dans ces épreuves. Nous avons trouvé $h = 370$ toiſes; ce qui fait voir (176) que la vîteſſe avec laquelle la bombe étoit chaſſée, étoit une vîteſſe à parcourir 366 pieds par ſeconde, dans le vide.

A l'égard de la quantité $-\frac{P}{k^2}$, voici comment nous

TABnt que l'air ne réſiſte pas; 2° observées dans les épreuves faites arquis DE MONTEYNARD, *Section de M.* DE BEAUVOIR, *Brigllerie.*

ANGLE de PROJECTION	PORTÉES d'ard ance.	PORTÉES selon l'expérience.	ANGLES de CHUTE.
	dégré	secondes	degrés.
10...	1/10...	.... 4.....	....14.
70...	7/10...	....22.....	....74.
75...	7/10...	....22.....	....78.

Les puces 10 lignes de diamètre, du poi elles ont été chaſſées avec 3£ 3/4 d

BIBLIOTHÈQUE NATIONALE LYON

l'avons déterminée. On doit ſe rappeler (501) que $\frac{p}{k^2} = \frac{nDS}{M}$. Soit $2r$ le diamètre de la bombe; on aura, en repréſentant par $1 : c$, le rapport du diamètre à la circonférence, cr^2 pour la ſurface du grand cercle de la bombe. Donc (396) on aura $S = \frac{1}{2} cr^2$. Le volume de la bombe ſera $\frac{4}{3} cr^3$, & en appelant D' ſa denſité, on aura $\frac{4}{3} cr^3 D'$ pour ſa maſſe M. D'ailleurs (382) on a $n = \frac{1}{2}$; on aura donc $\frac{p}{k^2} = \frac{1}{16} \times \frac{D}{D'r}$ $= \frac{1}{8} \frac{D}{D'} \times \frac{1}{2r}$. Or le volume de la bombe étant $\frac{4}{3} cr^3$; puiſqu'un pied cube d'air pèſe $\frac{70£}{850}$, le poids du volume d'air qu'occupe cette bombe, eſt donc $\frac{4}{3} cr^3 \times \frac{70}{850}$, r étant exprimé en pieds. Mais le poids de la bombe étoit de 142£, on a donc $D : D' :: 1 \frac{4}{3} cr^3 \times \frac{70}{850} : 142$; & par conſéquent $\frac{D}{D'} = \frac{\frac{4}{3} cr^3 \times 7}{85 \times 142}$ & comme le diamètre de ces bombes étoit de 11 pouces 10 lignes, ou de $0^{pi.},986111$, on aura $\frac{D}{D'} =$ $0,00029325$, & par conſéquent $\frac{p}{k^2} = \frac{1}{8} \times 0,00029325$ $\times \frac{1}{0^{pi.},986111} = \frac{1}{8} \times 0,00029325 \times \frac{1}{0^{toi.},164352} =$ $0,0004812$.

837. Pour multiplier les comparaiſons entre la théorie & l'expérience, nous avons auſſi calculé, par les moyens enſeignés (542), la durée des portées.

838. On peut remarquer ſur ces portées, que preſque toutes les portées calculées tombent entre les portées

obſervées, & que pour celles qui ſortent des limites des portées obſervées, l'écart eſt fort petit, & n'excède pas les écarts des portées entr'elles. Il en eſt bien différemment, dans l'hypothèſe que l'air ne réſiſte pas.

A l'égard des durées des portées, on voit avec quelle préciſion elles s'accordent.

839. Parlons actuellement de la Table des portées des boulets.

Pour plus d'exactitude dans la meſure de la force de la poudre, nous avons d'abord calculé h à l'aide de la portée moyenne ſous 5 degrés; puis nous l'avons calculée à l'aide de la portée moyenne ſous 10 degrés; & nous avons pris pour h la valeur moyenne entre ces deux-là. Lune & l'autre ont été calculées par la méthode donnée (525), ſans égard au changement de denſité qui ne produit que très-peu de choſe ſous ces deux angles. Ainſi la valeur de h étant le réſultat moyen de huit obſervations, doit être regardée comme très-exacte. Nous avons donc trouvé $h = 4393$ toiſes; ce qui fait voir (176) que la viteſſe du boulet au ſortir de la pièce étoit une viteſſe à parcourir 1262 pieds par ſeconde, dans le vide. On peut donc eſtimer à 1262 pieds par ſeconde, la viteſſe qu'a reçu, dans ces épreuves, le boulet de 24, à la charge de $8\frac{1}{2}$ de poudre.

A l'égard de $\frac{p}{k^2}$, quoique les boulets dont on a fait uſage dans ces épreuves, ſoient de 24, comme ceux dont il a été queſtion (524); cependant comme ceux-ci ont été ſuppoſés avoir $5^{po},344$ de diamètre, & que ceux des épreuves actuelles avoient $5^{po},5$, nous avons diminué la valeur de $\frac{p}{k^2}$ trouvée (524), dans le rapport de

5, 5 à 5, 444, ainſi qu'on doit le faire, puiſque $\frac{p}{k^2} = \frac{1}{8} \times \frac{D}{D'} \times \frac{1}{27}$ (514). Ainſi nous avons pris $\frac{p}{k^2} = 0{,}00081189$.

840. C'eſt d'après ces données, & la méthode expoſée (520 & 539), que nous avons calculé les portées & les hauteurs où le boulet a dû s'élever, dans la ſuppoſition d'une denſité conſtante. Les unes & les autres ſont un peu trop fortes, ainſi que nous l'avons déja dit; mais comme ce calcul n'avoit pour objet que de déterminer l'angle de chute, & la denſité au ſommet de la courbe; ce calcul eſt plus que ſuffiſant, pour cet objet. Nous l'avons compris dans la Table, pour faciliter le calcul à ceux des lecteurs qui voudroient le répéter. Quant aux portées calculées, eu égard à la variation de denſité, elles ont été calculées par la méthode que nous venons d'expoſer (830 *& ſuiv.*); & on doit les regarder comme très-approchantes de ce que donneroit la théorie la plus rigoureuſe.

841. On peut juger par la Table ci-après de l'effet prodigieux de la réſiſtance de l'air. Il eſt fort aiſé (474) de calculer, avec la force de poudre que nous venons de déterminer, quelles auroient dû être les portées ſi l'air ne réſiſtoit pas. A 45 degrés, par exemple, la portée auroit dû être de 8786 toiſes. Le calcul fait voir, qu'eu égard à la réſiſtance, cette portée n'a dû être que de 1984 toiſes; & l'expérience donne pour portée moyenne 2054; ainſi la théorie actuelle peut être ici ſuppoſée différer tout au plus de 70 toiſes à l'égard de l'expérience; tandis que dans l'hypothèſe de la parabole, elle

en différeroit de 6732 toiſes ; ainſi l'effet de la réſiſtance de l'air ſelon l'expérience, eſt de 6732 toiſes, & ſelon la théorie, de 6802 toiſes.

842. Si on compare les portées calculées aux portées obſervées, on reconnoîtra facilement qu'elles s'accordent en général auſſi-bien qu'il eſt poſſible de le déſirer dans des épreuves ſujettes à autant de difficultés de pratique. On ne peut douter du ſoin avec lequel celles-ci ont été faites. Mais de l'aveu même du Chef éclairé qui a dirigé ces épreuves, quelque ſoin qu'on apporte à rendre toutes les circonſtances égales, il en eſt, de l'égalité deſquelles il eſt comme impoſſible de s'aſſurer, & qui cependant ont une influence ſenſible.

C'eſt à de pareilles cauſes, ſans doute, qu'on doit attribuer deux inégalités que l'on pourra remarquer dans les portées obſervées ſous 35 & ſous 43 degrés. 1°. Celles de 35 degrés paroiſſent en général plus foibles que celles ſous 30 degrés, quoiqu'elles duſſent être plus fortes, ſelon l'expérience même, qui les donne plus grandes à 40 degrés. 2°. Les portées ſous 43 degrés ſurpaſſent celles de 40, de beaucoup plus qu'elles ne paroîtroient devoir le faire. Il eſt indubitable cependant que dans le voiſinage du *maximum* des portées, les différences doivent être plus petites que par-tout ailleurs. On le voit évidemment en comparant les trois différentes eſpèces de portées calculées dans cette Table ; & on ſent d'ailleurs aiſément que cela doit être, dans quelqu'hypothèſe de réſiſtance que ce ſoit.

843. Quoi qu'il en ſoit, les douze autres portée donnent lieu de regarder la théorie actuelle comme très-approchée ; & vu les difficultés inévitables dans la pra-

TABLE …gée à 8£ ½ de poudre, telles qu'elles *seroient* …à différentes hauteurs; 3° dans l'air, *eu égard* …s portées observées dans les épreuves *faites à* … DE MONTEYNARD, Secrétaire *d'Etat* … BEAUVOIR, Brigadier des armées *du Roi*

ANGLES DE PROJ…	DURÉE DES PORTÉES.				ANGLES DE
	…r.				
Sans la réſiſtance	…gard	Sans	Eu égard	Selon	
…8786…	…	…59 1/10…	…33 1/3…	…34…	72.
…8653…	…	…64…	…35 2/3…	…36…	75.
…7609…	…	…72 2/5…	…40 1/3…	…43 1/2…	81.
…5644…	…	…78 1/2…	…44…	…46…	83.
…4393…	…	…80 7/10…	…45 1/2…	…48 1/4…	84.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE NAPOLI

tique, on peut douter que la théorie la plus rigoureuſe s'accordât mieux avec l'expérience.

844. On peut remarquer dans cette Table, & dans celle que nous avons donnée ſur les bombes, que l'angle de la plus grande portée, diffère ſenſiblement de ce qu'il auroit été dans le vide. Et l'expérience eſt, en cela, d'accord avec la théorie, quoique l'une & l'autre ne donnent pas le même angle. Mais il paroît très-difficile que l'expérience détermine jamais bien cet angle, parce que les différences des portées dans le voiſinage de cet angle, ne pouvant manquer d'être fort petites, ſeront au-deſſous des différences que la pratique peut avoir entre les portées ſous un même angle.

845. A l'égard de la durée des portées; dans le calcul que nous en avons fait, nous n'avons pas eu égard à la variation de denſité; non que cela eût été plus difficile, mais parce que la différence ne peut être que fort petite. Les durées obſervées, que l'on trouve dans la même Table, ſont les durées moyennes, entre celles qui ont été obſervées pour chacune des quatre portées correſpondantes à un même angle.

846. Faiſons voir préſentement comment on peut déterminer plus rigoureuſement la courbe décrite dans un milieu d'une denſité uniforme.

La valeur rigoureuſe de dx eſt donc $dx = -\frac{k^2}{2p} d\,\text{tang. } H$

$$\overline{C - \text{tang. } H\,[\tfrac{1}{2}\,\text{séc. } H + \tfrac{1}{2}\,\text{cot. } H \log.\,\text{tang.}\,(45^d + \tfrac{1}{2}H)]}$$

Je ſuppoſe que $\frac{1}{2}$ séc. $H + \frac{1}{2}$ cot. H log. tang. $(45^d + \frac{1}{2}H)$ ſoit repréſenté par

$1 + A$ tang.^{2} H. Il eſt facile de s'aſſurer par la Table des valeurs de a, donnée ci-deſſus (*page* 454), que A ſera toujours une quantité fort petite, & qui variera très-peu. Nous pouvons donc regarder A comme une quantité conſtante dans toute l'étendue de la courbe ; & la valeur conſtante, la plus convenable que nous devions lui attribuer, eſt ſa valeur au point de projection. Nous prendrons donc $A = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{-1 + \frac{1}{2}\text{séc. } I + \frac{1}{2}\text{cot. } I \log.\text{tang.}(45^d + \frac{1}{2} I)}{\text{tang.}^2 I} = \frac{a-1}{\text{tang.}^2 1} = (a-1)\text{ cot.}^2 I$. Nous aurons donc $\frac{2p\,dx}{k^2} = \frac{-d\,\text{tang. } H}{C - \text{tang. } H - A\,\text{tang.}^3 H}$.

J'obſerve préſentement, 1°. que cette valeur de dx, d'ailleurs très-approchée, coincide avec la valeur rigoureuſe, en trois points de la courbe, ſavoir, au point de départ, au ſommet, & au point de la branche deſcendante, qui a la même inclinaiſon que le point de projection. 2°. Que la valeur que nous venons d'attribuer à A étant la plus petite de toutes celles qu'il peut avoir dans la branche aſcendante, le dénominateur de dx eſt en général un peu plus grand qu'il ne doit être ; d'où, en raiſonnant d'une manière ſemblable à ce que nous avons fait (515 *& ſuiv.* & 824), on conclura que les portées calculées dans la ſuppoſition actuelle,

ſeront un peu plus courtes que les véritables. On aura donc dans cette méthode, & dans celle expoſée, (503 & *ſuiv.*) deux limites fort approchées des véritables portées.

847. Venons à l'intégration de la valeur de dx. Faiſons $A = \frac{1}{B}$, & nous aurons $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{B\,d\,\text{tang.}\,H}{-BC+B\,\text{tang.}\,H+\text{tang.}^2 H}$. Soit c la racine réelle de l'équation $\text{tang.}^3 H + B\,\text{tang.}\,H - BC = 0$; ſi on diviſe $\text{tang.}^3 H + B\,\text{tang.}\,H - BC$, par $\text{tang.}\,H - c$, on aura, en négligeant le reſte de la diviſion (qui, par l'hypothèſe, doit être zéro), on aura, dis-je, $\text{tang.}^2 H + c\,\text{tang.}\,H + B + c^2$ pour le ſecond facteur du dénominateur (*Algèb.* 146 & 151).

On aura donc $\frac{2pdx}{k^2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\frac{B\,d\,\text{tang.}\,H}{(\text{tang.}\,H-c)\,(\text{tang.}^2 H + c\,\text{tang.}\,H + B + c^2)}$.

Suppoſons (108) ce ſecond membre décompoſé en ces deux fractions $\frac{D\,d\,\text{tang.}\,H}{\text{tang.}\,H-c}$ & $\frac{E\,\text{tang.}\,H d\,\text{tang.}\,H + F d\,\text{tang.}\,H}{\text{tang.}^2 H + c\,\text{tang.}\,H + B + c^2}$. Nous trouverons (111) $E = -D$, $F = -2Dc$, & $D = \frac{B}{B+3c^2}$.

Nous aurons donc $\frac{2pdx}{k^2} = \frac{D\,d\,\text{tang.}\,H}{\text{tang.}\,H-c} - \frac{D\,\text{tang.}\,H\,d\,\text{tang.}\,H + 2Dc\,d\,\text{tang.}\,H}{\text{tang.}^2 H + c\,\text{tang.}\,H + B + c^2}$, ou $\frac{2pdx}{Dk^2} =$

$$\frac{d\,\text{tang.}\,H}{\text{tang.}\,H-c} - \tfrac{1}{2} \times \frac{2\,\text{tang.}\,H\,d\,\text{tang.}\,H + c\,d\,\text{tang.}\,H}{\text{tang.}^2 H + c\,\text{tang.}\,H + B + c^2}$$

$$\frac{-\tfrac{1}{2}c\,d\,\text{tang.}\,H}{\text{tang.}\,H^2 + c\,\text{tang.}\,H + B + c^2}.$$

Les deux premiers termes ſont évidemment des différencielles logarithmiques qui s'intègrent facilement. Quant au troiſième, ſi on fait tang. $H + \frac{1}{2}c = \zeta$; puis $B + \frac{1}{4}c^2 = ff$, & $\zeta = f\zeta'$, ce terme deviendra $-\frac{1}{2}\frac{c}{f}\frac{d\zeta'}{\zeta'\zeta+1}$ qui (86) eſt la différencielle d'un arc de cercle dont le rayon eſt 1, & dont la tangente eſt ζ' ou $\frac{\zeta}{f}$ ou $\frac{\text{tang.}\,H+\frac{1}{2}c}{f}$, donc en intégrant nous aurons $\frac{2px}{Dk^2}$ $= \log.(\text{tang.}\,H-c) - \frac{1}{2}\log.(\text{tang.}^2 H + c\,\text{tang.}\,H + B + c^2)$ $-\frac{1}{2}\frac{c}{f}\,\text{arc. tang.}\left(\frac{\text{tang.}\,H+\frac{1}{2}c}{f}\right) + C'$; ou bien, en déterminant comme on le doit, la conſtante C', par la condition que $x = 0$, lorſque $H = I$, & faiſant attention que $\text{tang.}^2 H + c\,\text{tang.}\,H + B + c^2$ $= (\text{tang.}\,H + \frac{1}{2}c)^2 + ff = ff\left[\left(\frac{\text{tang.}\,H+\frac{1}{2}c}{f}\right)^2 + 1\right]$; on aura.....

$$\frac{2px}{Dk^2} = \log.\frac{\text{tang.}\,H-c}{\text{tang.}\,I-c} - \tfrac{1}{2}\log.\frac{\left(\frac{\text{tang.}\,H+\frac{1}{2}c}{f}\right)^2+1}{\left(\frac{\text{tang.}\,I+\frac{1}{2}c}{f}\right)^2+1}$$

$$-\tfrac{1}{2}\frac{c}{f}\left(\text{arc tang.}\,\frac{\text{tang.}\,H+\frac{1}{2}c}{f} - \text{arc tang.}\,\frac{\text{tang.}\,I+\frac{1}{2}c}{f}\right).$$

848. Voyons préſentement la valeur de y. Nous

Nous avons $\frac{dy}{dx} = \text{tang. } H$, où $dy = dx \text{ tang. } H$;

donc $\frac{2p\,dy}{k^2} = \frac{D \text{ tang. } H\, d \text{ tang. } H}{\text{tang. } H - c} -$

$\frac{D \text{ tang.}^2 H d \text{ tang. } H + 2Dc \text{ tang. } H d \text{ tang. } H}{\text{tang.}^2 H + c \text{ tang. } H + B + c^2}$, qui, en faiſant la diviſion partielle, ſe réduit à $\frac{2p\,dy}{k^2} =$

$\frac{Dc\,d \text{ tang. } H}{\text{tang. } H - c} - \frac{(Dc - BD - Dc^2) \text{ tang. } H d \text{ tang. } H}{\text{tang.}^2 H + c \text{ tang. } H + B + c^2}$

ou $\frac{2p\,dy}{Dk^2} = \frac{c\,d \text{ tang. } H}{\text{tang. } H - c} - \frac{\frac{1}{2}c(2 \text{ tang } H + c)\,d \text{ tang. } H}{\text{tang.}^2 H + c \text{ tang. } H + B + c^2}$

$+ \frac{(B + \frac{1}{2}cc)\,d \text{ tang. } H}{\text{tang.}^2 H + c \text{ tang. } H + B + c^2}$, équation ſur laquelle raiſonnant & opérant, comme nous avons fait ſur la valeur de dx, on a $\frac{2py}{Dk^2} = c \log. \frac{\text{tang. } H - c}{\text{tang. } I - c}$

$- \frac{1}{2}c \log. \frac{\left(\frac{\text{tang. } H + \frac{1}{2}c}{f}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\text{tang. } I + \frac{1}{2}c}{f}\right)^2 + 1} + \frac{B + \frac{1}{2}cc}{f}$

$\left(\text{arc tang. } \frac{\text{tang. } H + \frac{1}{2}c}{f} - \text{arc tang. } \frac{\text{tang. } I + \frac{1}{2}c}{f}\right)$.

Ainſi donnant à H telle valeur que l'on voudra dans chacune des deux équations que nous venons de trouver, on aura la valeur de y, & la valeur de x qui lui correſpond.

Et pour avoir l'amplitude totale ou la portée, on ſubſtituera dans la dernière équation, ſucceſſivement pour H différentes valeurs négatives, juſqu'à ce qu'on en trouve une qui donne $y = 0$.

Alors cette même valeur de H ſubſtituée dans l'équation en x, donnera la valeur de x ou la portée.

849. Mais on peut beaucoup ſimplifier ces valeurs de x & de y : & voici comment :

Nommons M l'arc qui a pour tangente $\frac{\text{tang. } H + \frac{1}{2}c}{f}$, & M' celui qui a pour tangente $\frac{\text{tang. } I + \frac{1}{2}c}{f}$; nous aurons arc tang. $\frac{\text{tang. } H + \frac{1}{2}c}{f} = M$, & par conſéquent $\frac{\text{tang. } H + \frac{1}{2}c}{f} = \text{tang. } M$ & tang. $H = f$ tang. $M - \frac{1}{2}c$; on aura pareillement tang. $I = f$ tang. $M' - \frac{1}{2}c$. Subſtituant ces valeurs, on a $\frac{2px}{Dk^2} = \log. \frac{f \text{ tang. } M - \frac{1}{2}c}{f \text{ tang. } M' - \frac{1}{2}c} - \frac{1}{2} \log. \frac{\text{tang.}^2 M + 1}{\text{tang.}^2 M' + 1} - \frac{1}{2}\frac{c}{f}(M - M')$.

Soit $f = \frac{1}{2}c$ tang. l ; ſi on fait attention à ce que $\frac{\text{ſin. } A}{\text{coſ. } A} = \text{tang. } A$, coſ. A coſ. $B -$ ſin. A ſin. $B =$ coſ. $(A + B)$, on aura $\frac{2px}{Dk^2} = \log. \frac{\text{coſ. } (M + l)}{\text{coſ. } (M' + l)} \times \frac{\text{coſ. } M'}{\text{coſ. } M} - \frac{1}{2} \log. \frac{\text{coſ.}^2 M'}{\text{coſ.}^2 M} - \frac{1}{2}\frac{c}{f}(M - M')$; c'eſt-à-dire, $\frac{2px}{Dk^2} = \log. \frac{\text{coſ. } (M + l)}{\text{coſ. } (M' + l,} - \frac{1}{2}\frac{c}{f}(M - M')$.

Et par un raiſonnement ſemblable, on trouvera $\frac{2py}{Dk^2} = c \log. \frac{\text{coſ. } (M + l)}{\text{coſ. } (M' \pm l)} + \frac{B + \frac{1}{2}c^2}{f}(M - M')$,

850. Et pour récapituler, on aura c en réſolvant l'équation $\text{tang.}^3 H + B \text{ tang. } H - BC = 0$; f, par l'équation $B + \frac{1}{4} c^2 = ff$; l, par l'équation $\frac{f}{\frac{1}{2} c} = \text{tang. } l$; M, par l'équation $\frac{\text{tang. } H + \frac{1}{2} c}{f} = \text{tang. } M$; M' par l'équation $\frac{\text{tang. } I + \frac{1}{2} c}{f} = \text{tang. } M'$.

M & M' étant trouvés en degrés & minutes, on aura leurs valeurs abſolues, en multipliant leur valeurs en minutes, par 0,0002908882 qui exprime la longueur de l'arc d'une minute; ou bien en ajoutant au logarithme de M & M' comptés en minutes, le logarithme conſtant 6,4637261, on aura le logarithme de la valeur abſolue de M & de M'.

851. D'après ce que nous avons dit (830), il eſt aiſé de voir actuellement comment on peut, dans cette ſeconde méthode, avoir égard au changement de denſité. Faiſant $\frac{k^2}{2p} = \frac{1}{2D}$, on ſuppoſera que....

$$\frac{-\frac{1}{2D} d \text{ tang. } H}{C - \text{tang. } H\left[\frac{1}{2} \text{séc. } H + \frac{1}{2} \text{cot. } H \log. \text{tang.} (45^d + \frac{1}{2} H)\right]}$$

eſt repréſenté par $\frac{-d \text{ tang. } H}{A - B \text{ tang. } H - E \text{ tang.}^3 H}$, & l'on déterminera A, B, E, par les trois équations,

$\frac{1}{2D\,(C - a\ \text{tang.}\ I)} = \frac{1}{A - B\ \text{tang.}\ I - E\ \text{tang.}^3 I}$, $\frac{1}{2D'C} = \frac{1}{A}$, & $\frac{1}{2D\,(C + a'\ \text{tang.}\ I')} = \frac{1}{A + B\ \text{tang.}\ I' + E\ \text{tang.}^3 I'}$, $\frac{1}{2D'}$ étant la valeur de $\frac{k^2}{2p}$ au ſommet de la courbe, & $\frac{1}{2D}$ ſa valeur au point de projection, & au point de chute.

852. On voit que, par cette ſeconde méthode, on ne ſera pas obligé de calculer ſéparément la branche deſcendante & la branche aſcendante, pour avoir égard au changement de denſité.

853. Parmi les tentatives que l'on a faites juſqu'ici pour déterminer la courbe décrite par les projectiles dans un milieu réſiſtant, nous devons citer particulièrement un Mémoire que M. le Chevalier de Borda a lu à l'Académie des Sciences, l'année dernière 1770; cet Académicien y traite le ſujet actuel par une méthode très-ingénieuſe, & d'ailleurs abſolument différente de chacune de celles que nous venons d'expoſer. J'ignore juſqu'à quel degré de préciſion la méthode de cet Académicien peut donner les portées, n'en ayant point calculé par cette voie. Mais les deux méthodes que nous propoſons ici offrent quelques avantages qui leur ſont particuliers; celui de calculer les portées

ſans être obligé néceſſairement à calculer ſéparément la branche aſcendante & la branche deſcendante; & celui de donner les limites des portées, ce qui nous ſemble abſolument néceſſaire pour s'aſſurer de l'exactitude de ce genre d'approximation.

854. Nous terminerons en ajoutant une obſervation ſur ce que nous avons dit (416 & *ſuiv.*) ſur les cauſes du recul. On doit encore, parmi ces cauſes, compter la maſſe de la poudre elle-même, ainſi que l'a très-bien obſervé M. le Chevalier d'Arcy, dans ſon eſſai ſur la théorie de l'Artillerie. Quelque petite que ſoit la maſſe du fluide élaſtique qui ſe développe pendant chaque portion infiniment petite de la durée de l'inflammation de la poudre, l'extrême vîteſſe avec laquelle toute cette matière eſt lancée hors de la pièce, ſuppoſe une quantité de mouvement, & par conſéquent une réaction contre la pièce, qui ne peut être à négliger. Mais il paroît très-difficile de déterminer la loi ſuivant laquelle s'exerce l'action dépendante de la maſſe de la poudre.

FIN.

608496

TABLE
DES MATIÈRES.

APPLICATIONS des principes généraux de la Mécanique à différens cas de mouvement & d'équilibre, page 1.

Du choc direct des corps, *Ibid.*

Du choc direct des corps durs, p. 2.

Règle générale pour trouver la viteſſe après le choc, p. 6.

Réflexions ſur la force d'inertie, *Ibid.*

Cette force diffère des forces actives, en ce que le mouvement perdu par l'un des corps, n'eſt point entièrement perdu, mais il paſſe à l'autre corps, p. 7.

Elle ne dépend ni de la peſanteur, ni de la réſiſtance de l'air; c'eſt une force particulière à la matière, & qui ſe fait ſentir proportionnellement à la maſſe ou au nombre des parties matérielles, p. 9.

Quelques applications du choc des corps durs; conſéquences qui en réſultent par rapport à la percuſſion, p. 10.

La force d'un corps en mouvement, ne peut être meſurée par des poids, p. 14.

Remarques ſur les forces vives, p. 18.

Que la différence de ſentimens qui a partagé les Mathématiciens pendant quelque temps, ſur la meſure des forces des corps en mouvement, ne tient qu'à la différente acception du mot *force*, chez les uns & les autres, & n'intéreſſe en rien la Mécanique, p. 21.

Du choc direct des corps élaſtiques, p. 22.

Règle générale pour avoir la vîteſſe après le choc des corps élaſtiques, p. 25.
La vîteſſe relative des corps élaſtiques, eſt la même, après le choc, qu'auparavant, p. 30.
Du choc & de la réſiſtance des fluides, *Ibid.*
La réſiſtance faite aux ſurfaces planes, mues directement, eſt en raiſon compoſée de la denſité du milieu, de l'étendue de la ſurface, & du quarré de la vîteſſe, p. 33.
Meſure du choc ou de la réſiſtance abſolue des fluides; différens ſentimens ſur ce point, pp. 37 & 38.
Modifications à la loi générale de réſiſtance précédemment établie, p. 39.
Choc des fluides peut être comparé au poids des corps, *Ibid.*
Le choc inſtantané de deux corps, dans un fluide, ſe fait comme dans un milieu libre, p. 40.
De la réſiſtance ſur les ſurfaces planes obliques, p. 43.
De la réſiſtance qu'éprouve un ſolide de révolution, mu ſuivant ſon axe, p. 54.
Application à la ſphère, p. 56.
Du mouvement rectiligne des corps dans les milieux réſiſtans, p. 57.
Application à l'une des expériences faites à Londres par Newton, p. 64.
De la vîteſſe que les projectiles peuvent recevoir par l'action d'un fluide élaſtique condenſé, tel que l'air ou la poudre enflammée, p. 72.
Du rapport de la charge, à la longueur de la pièce, pour que la vîteſſe ſoit la plus grande poſſible, p. 78.
Autres conſidérations néceſſaires pour réſoudre pleinement la queſtion de la vîteſſe des projectiles au ſortir de la pièce, p. 79.
De la force du recul dans les armes à vent ou à feu, p. 80.
Du mouvement des corps peſans le long des plans inclinés, p. 88.
Rapport de la vîteſſe, le long du plan incliné, à la vîteſſe contemporaine, ſuivant la verticale, p. 92.
Eſpaces décrits en même-temp

par la chute verticale & par la chute le long des plans différemment inclinés, p. 93.

Égalité entre le temps de la chute par le diamètre vertical d'un cercle & le temps de la chute par une ſoutandante quelconque, tirée d'une extrémité de ce diamètre, p. 94.

Rapport des temps des chutes le long de plans différemment inclinés & de même hauteur, p. 95.

Rapport des vîteſſes acquiſes par des chutes le long de plans différemment inclinés & de même hauteur, p. 96.

Du mouvement le long des ſurfaces courbes, *Ibid.*

La vîteſſe acquiſe en tombant le long d'un arc de courbe quelconque, eſt la même que celle qui auroit été acquiſe en tombant verticalement de la même hauteur, p. 100.

Rapport des vîteſſes acquiſes par des chutes le long d'arcs de cercle, p. 103.

Du mouvement d'oſcillation, p. 104.

Les oſcillations qui ſe font dans des arcs d'un petit nombre de degrés, ſont ſenſiblement de même durée entre elles, p. 107.

Pendule ſimple ; ce qu'on entend par là, *Ibid.*

Rapport des durées des oſcillations, avec les longueurs des pendules & l'intenſité de la peſanteur, p. 109.

Rapport du nombre des vibrations, p. 110.

Longueur du pendule qui bat les ſecondes à Paris, p. 111.

Comment elle ſert à déterminer la quantité dont un corps peſant doit tomber dans la première ſeconde de ſa chute, ſans la réſiſtance de l'air, p. 112.

Le temps de la chute par l'arc de cercle, plus court que le temps de la chute par la corde du même arc, p. 113.

Du mouvement en ligne courbe, en général, *Ibid.*

Du mouvement dans le cercle & de la force centrifuge, p. 117.

Rapport de la force centrifuge d'un corps qui circule, à ſon poids, p. 119.

Comparaiſons des forces centrifuges entr'elles, p. 124.

Du mouvement des projectiles dans le vide, p. 128.

La courbe décrite dans le vide, par les projectiles, eſt une parabole, p. 132.

Comment on la détermine à l'aide de l'angle, & de la vîteſſe de projection, pp. 133 *& ſuiv.*

Comment on détermine l'amplitude du jet, ou la portée, p. 136.

La plus grande portée dans le vide, eſt ſous 45 degrés; & à diſtances égales de part & d'autre de 45 degrés, les portées ſont égales, p. 137.

Rapports des portées, pp. 138 & 139.

Quelle ſeroit la portée de *but en blanc* dans le vide, p. 140.

Comment on détermine l'inclinaiſon qu'on doit donner au mortier pour faire tomber une bombe ſur un objet propoſé, p. 143.

Il y a toujours deux inclinaiſons propres à cet effet, p. 144.

Des ricochets, pp. 147 *& ſuiv.*

Du mouvement des projectiles dans les milieux réſiſtans, p. 153.

Quoique l'air ſoit un fluide fort rare, ſa réſiſtance au mouvement des projectiles en uſage dans l'Artillerie, n'en altère pas moins conſidérablement les portées, p. 154.

Table d'épreuves de portées d'une pièce de 24, chargée à 9 livres de poudre, de laquelle il réſulte qu'en regardant comme nulle la réſiſtance faite à la portée ſous 15 degrés, la portée obſervée ſous 45 degrés n'eſt que les $\frac{3}{7}$ de ce qu'elle auroit dû être ſi l'air n'eut pas réſiſté, & qu'elle eſt de près de 1000 toiſes plus courte que celle-ci, p. 155.

Et comme la portée obſervée ſous 15 degrés a elle-même été altérée par la réſiſtance de l'air, il s'enſuit que la portée ſous 45 degrés, l'a été beaucoup plus qu'il ne réſulte de cette première comparaiſon, p. 156.

Comment on détermine les équations qui ſervent à trouver les circonſtances du mouvement des projectiles dans les milieux réſiſtans, p. 157.

Les méthodes ordinaires d'approximation ſont inſuffiſantes

pour déterminer la courbe, lorſque la viteſſe de projection eſt grande, p. 164.
Manière de lever cette difficulté, pp. 166 *& ſuiv.*
Équation très-approchée de la courbe décrite par les projectiles dans un milieu réſiſtant, p. 174.
Comparaiſon de cette théorie avec l'expérience, p. 176.
Comment on en conclud la force de la poudre dans les épreuves rapportées à la *p.* 155, p. 177.
La portée obſervée ſous 15 degrés, ſuppoſe que le boulet eſt parti avec une viteſſe à parcourir 1393 pieds ou 232 toiſes par ſeconde, dans le vide, p. 180.
Manière de calculer les portées relatives aux autres épreuves contenues dans la Table de la *page* 155, p. 181.
Table de comparaiſon des portées calculées, avec les portées obſervées, p. 185.
Table des plus grandes hauteurs auxquelles le boulet a dû s'élever dans ces épreuves, p. 191.
De la manière de calculer la durée des portées, *Ibid.*
Application à quelques épreuves faites à Straſbourg en 1766, p. 193.
La réſiſtance de l'air, dans ces épreuves, au ſortir de la pièce, étoit d'environ huit fois le poids du boulet, p. 195.
Table des durées des portées dans l'air & dans le vide, en vertu de la force de la poudre que ſuppoſent les épreuves rapportées à la *page* 155, p. 196.

De l'Équilibre et du Mouvement dans les Machines.

Le nombre des machines ſimples, peut être réduit à cinq, ſavoir, les cordes, le levier, la poulie, le treuil & le plan incliné, p. 200.
Des cordes, p. 200.
Équilibre entre trois forces appliquées à trois cordons aſſemblés par un même nœud, p. 201.

Rapports de ces forces, p. 203 *& ſuiv.*

Condition de l'équilibre lorſqu'une des forces agit à l'aide d'un anneau qui peut gliſſer ſur la corde à laquelle les deux autres forces ſont appliquées, & lorſqu'une corde tirée par deux puiſſances eſt retenue par un point fixe qu'elle embraſſe, pp. 207 *& ſuiv.*

Équilibre entre tant de puiſſances qu'on voudra, qui agiſſent les unes contre les autres à l'aide de cordes ſeulement, & rapports des forces, pp. 209 *& ſuiv.*

Comment, & dans quels cas, on peut varier les rapports, ou les directions des puiſſances, ſans troubler l'équilibre, pp. 213 *& ſuiv.*

Comment le poids des cordes change la communication de l'action des puiſſances, p. 218.

Des poulies & des mouffles, p. 222.

Comment ſe fait l'équilibre ſur la poulie, p. 223.

Rapports des tenſions des cordons qui embraſſent la poulie, à l'effort que ſupporte le centre, p. 224.

Autre manière d'enviſager l'équilibre ſur la poulie, p. 226.

Des mouffles, p. 229.

Rapport de la puiſſance au poids ſur les mouffles, pp. 229 *& ſuiv.*

Du levier, lorſque les forces qui lui ſont appliquées ſont toutes dans un même plan, p. 234.

Équilibre entre deux puiſſances appliquées à un levier, p. 235.

Rapport de ces deux puiſſances, p. 237.

Autres rapports, pp. 238 *& ſ.*

Leviers de différentes eſpèces, p. 240.

Remarques ſur le point d'appui, p. 241.

Différence entre l'équilibre des poids, & l'équilibre des corps animés de vîteſſes finies, p. 245.

Équilibre entre pluſieurs puiſſances appliquées à un levier, p. 247.

Propriété générale de cet équilibre, p. 249.

Comment on a égard au poids du levier, & différentes applications, pp. 250 *& ſuiv.*

De la balance & des conditions de ſa conſtruction, pp. 253 *& ſuiv.*

Du levier en mouvement, des centres de percuſſion, des centres d'oſcillation, & du choc excentrique des corps, p. 260.

Comment on détermine la viteſſe de rotation que doit prendre un corps fixé par un de ſes points, & ſollicité par pluſieurs forces qui agiſſent dans un même plan, p. 263.

Comment on trouve la réſultante & le point où paſſe la réſultante des mouvemens de rotation d'un corps aſſujetti à tourner autour d'un axe fixe, p. 266.

Ce que c'eſt que le *moment d'inertie* des corps, p. 267.

Ce que c'eſt que le centre de *percuſſion*, & comment on le détermine, p. 270.

Ce que c'eſt que le centre d'oſcillation, & comment on le détermine, pp. 270 *& ſuiv.*

Exemple du choc excentrique, p. 272.

Comment on détermine le *moment d'inertie* des corps, p. 274.

Application au centre de percuſſion & d'oſcillation d'une verge, p. 276.

Du point où il faudroit placer un corps, pour qu'il reçût d'une verge, tournant autour d'un point fixe, la plus grande force poſſible, p. 281.

Du centre de percuſſion & d'oſcillation d'une ſphère, p. 282.

Autre exemple du choc excentrique, p. 286.

Centre *ſpontané* de rotation; ce que c'eſt, & comment on le détermine, p. 290.

Du tour ou treuil, cabeſtan, &c. p. 292.

Comment ſe fait l'équilibre dans cette machine, p. 294.

Rapport de la puiſſance au poids, p. 295.

Quelques applications, p. 298.

Rapport du rayon de la roue à celui du cylindre, pour que, dans le cas du mouvement, la force communiquée ſoit la plus grande poſſible, p. 299.

Quelques autres applications du tour, pp. 301 *& ſuiv.*

Des roues dentées, p. 305.

Comment elles ſervent à augmenter la force dans un rapport donné, *Ibid.*

Comment elles ſervent à augmenter la viteſſe dans un rapport donné, p. 306.

Applications, p. 308.
De l'équilibre ſur les plans, p. 311.
Conditions de cet équilibre ſur un plan, pp. 311 *& ſuiv.*
Rapport de la puiſſance au poids, dans le cas de l'équilibre ſur un plan incliné, p. 314.
Autres manières d'exprimer ce rapport, pp. 314 *& ſuiv.*
Rapport que doivent avoir deux puiſſances pour être également propres à ſoutenir un même poids ſur un même plan incliné, p. 316.
Quelle eſt la plus petite puiſſance qu'on puiſſe employer pour ſoutenir un corps ſur un plan incliné, p. 318.
Quand un corps ne repoſe ſur un plan que par un ou deux points ſeulement, on peut déterminer la preſſion que ſupporte chaque point; mais s'il repoſe par plus de deux points, la preſſion de chacun eſt indéterminée, p. 321.
Rapport de deux poids qui ſe font équilibre ſur deux plans inclinés, à l'aide d'une corde qui les joint, p. 322.
Rapport de deux poids qui ſe font équilibre ſur deux plans inclinés, à l'aide d'une corde paſſant ſur une poulie de renvoi, p. 322.
Conditions de l'équilibre d'un poids qui repoſe ſur pluſieurs plans à la fois, p. 323.
Application aux voûtes, p. 324.
Du mouvement ſur les plans, p. 325.
De la vis, p. 327.
Pas de la vis, ce que c'eſt, p. 328.
Génération de la vis, *Ibid.*
Équilibre ſur cette machine, p. 329.
Rapport de la puiſſance au poids, p. 331.
Quelques applications, p. 333.
Du coin, p. 334.
Conſidéré comme un inſtrument à fendre, ſa théorie eſt encore fort imparfaite, p. 334.
Conditions de l'équilibre dans cette machine, p. 335.
Rapport de la puiſſance aux réſiſtances des parties à ſéparer, p. 337.
Du frottement, p. 339.
Ce que l'expérience apprend ſur le frottement, p. 341.
Comment on peut déterminer la valeur du frottement, par

l'expérience, pp. 346 & 348.
Condition, pour qu'un corps reſte en équilibre ſur une ſurface propoſée, eu égard au frottement, p. 349.
Angle du frottement; ce que c'eſt, p. 350.
Frottement ſur le levier dont l'appui eſt conſidéré comme un ſimple ſoutien, p. 351.
Frottement ſur le levier, dont l'appui eſt un boulon; & en général, du frottement ſur le tour, p. 352.
Charge des appuis de cette machine, pp. 356 *& ſuiv.*
Frottement dans le tour, ayant égard au poids de la machine, au diamètre & au poids des cordes, p. 361.
Application à la poulie fixe, p. 364.
Frottement dans la poulie mobile, p. 366.
Frottement dans les mouffles, p. 371.
Règle pour déterminer l'effet de ce frottement, lorſque le poids de la machine eſt petit, par rapport à celui que la machine doit élever, p. 373.
Application de cette règle, p. 374.
Frottement dans les mouffles; eu égard au poids de toutes les parties de la machine, pp. 376 *& ſuiv.*
Application à la chèvre, pour calculer la force néceſſaire pour élever avec cette machine, une piéce de 4, p. 378.
Manière plus générale de déterminer le rapport de deux puiſſances qui ſe font équilibre ſur le tour, eu égard au frottement & au poids de toutes les parties de la machine, p. 384.
Frottement ſur le plan incliné, p. 394.
Frottement des roues de voitures contre le terrein, & de l'eſſieu contre les boîtes, pp. 397 *& ſuiv.*
De quelle manière l'action du cheval & le poids de la voiture ſe diſtribuent, & ce qu'il faut pour déterminer le rapport de ces deux forces dans le cas du frottement, pp. 399 *& ſuiv.*
Comment on peut déterminer la plus petite force poſſible, qui puiſſe vaincre ce frottement; p. 405.
Différence dans la manière dont

on doit enviſager cette queſtion, dans le cas où il s'agit de faire rouler la voiture, & dans le cas où il s'agit de faire paſſer la roue ſur un obſtacle, p. 410.

Autres applications du frottement, pp. 411 *& ſuiv.*

Frottement d'une corde roulée ſur une ſurface courbe, p. 416.

Application, p. 419.

Comment on peut déterminer, par expérience, l'angle du frottement, relatif à cette eſpèce de frottement, p. 420.

De la roideur des cordes, p. 422.

De la manière d'eſtimer les forces appliquées aux machines, p. 426.

APPENDICE où l'on traite plus particulièrement du mouvement des Projectiles dans un milieu réſiſtant.

QUE la première méthode de calculer les portées, les donne trop fortes, p. 439.

Que néanmoins elle écarte peu du vrai, p. 440.

Que ſans avoir recours à la ſeconde méthode que l'on donne enſuite, on peut approcher davantage de la véritable valeur des portées, en calculant ſéparément la branche aſcendante & la branche deſcendante, p. 442.

De la manière d'avoir égard au changement de denſité, dans le calcul des portées, par la première méthode, pp. 443 *& ſuiv.*

Table des nombres néceſſaires dans le calcul du mouvement des projectiles dans les milieux réſiſtans, p. 454.

Table de comparaiſon entre la théorie & l'expérience, pour des bombes de 11 P°. 10 lig. de diamètre, du poids de 142 £, & chaſſées avec 3 £ ½ de poudre, p. 456.

Que les épreuves rapportées dans cette Table, font connoître que la bombe étoit chaſſée avec une viteſſe à parcourir 366 pieds par ſeconde, dans le vide, p. 456.

Table de comparaiſon entre la théorie & l'expérience pour

des boulets de 24, chaſſés avec 8£ ½ de poudre, p. 460.

Que la vîteſſe de ces boulets au ſortir de la pièce, étoit une vîteſſe à parcourir 1262 pieds par ſeconde, dans le vide, p. 458.

Que la réſiſtance de l'air altère tellement les portées, que ſon effet, ſelon l'expérience, a diminué la portée ſous 45d, de 6732 toiſes ſur 8786; & ſelon la théorie, de 6802 ſur 8786, pp. 459 & 460.

Comment on détermine plus rigoureuſement l'équation de la courbe décrite par les projectiles dans les milieux réſiſtans, p. 461.

Comment on emploie cette méthode pour avoir égard au changement de denſité, p. 467.

Fin de la Table des Matières.

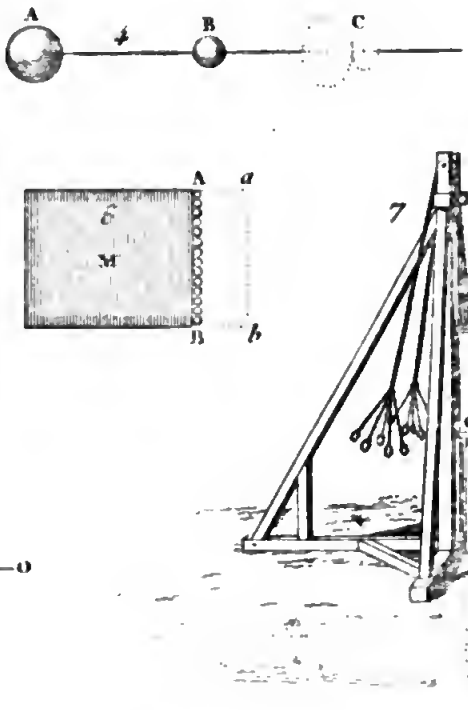
EXTRAIT DES REGISTRES.

DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES.

Du 11 Décembre 1771.

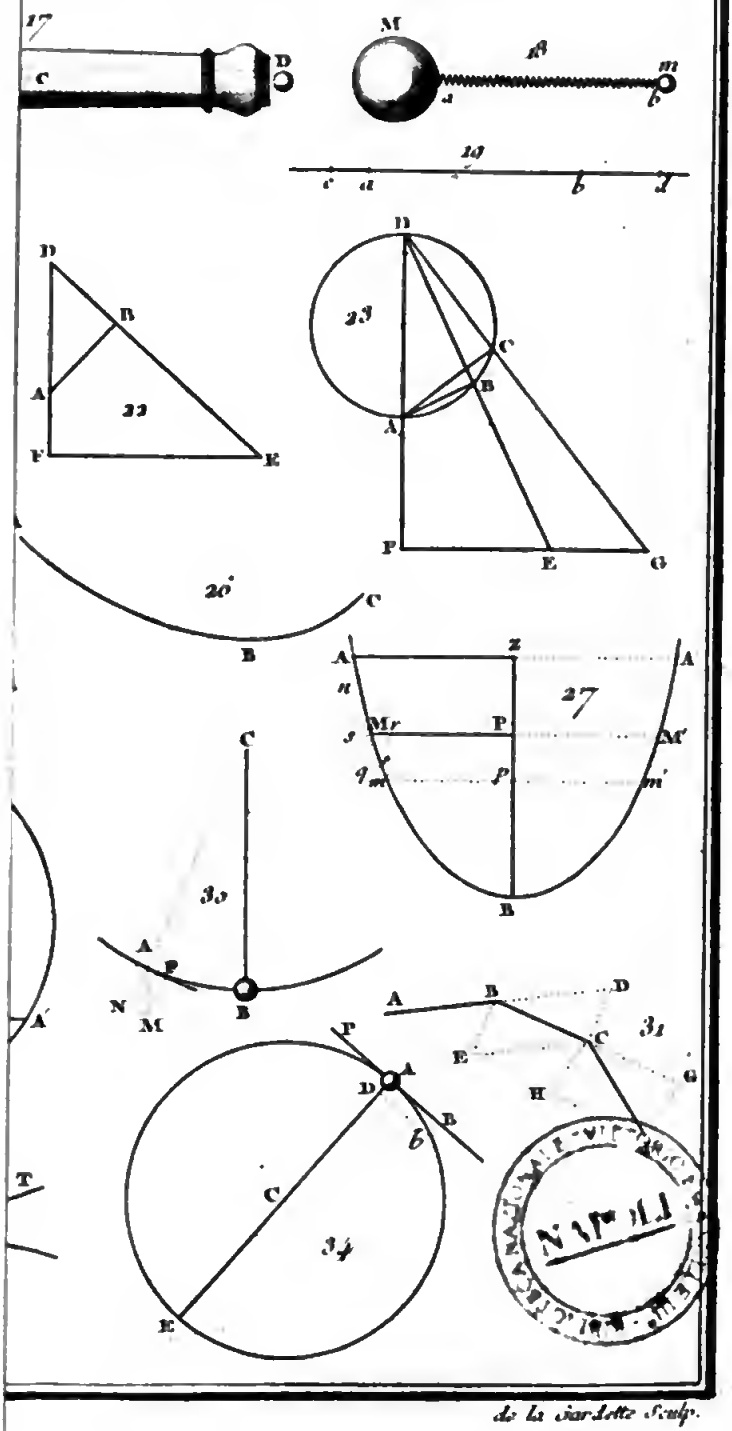
M^rs d'Alembert, du Séjour, & Vandermonde, qui avoient été nommés pour examiner les troiſième & quatrième Volumes du *Cours de Mathématiques à l'uſage du Corps Royal de l'Artillerie*, par M. Bézout, en ayant fait leur rapport; l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impreſſion. A Paris, le onze Décembre mil ſept cent ſoixante-onze.

Signé *Grandjean de Fouchy*,
Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.

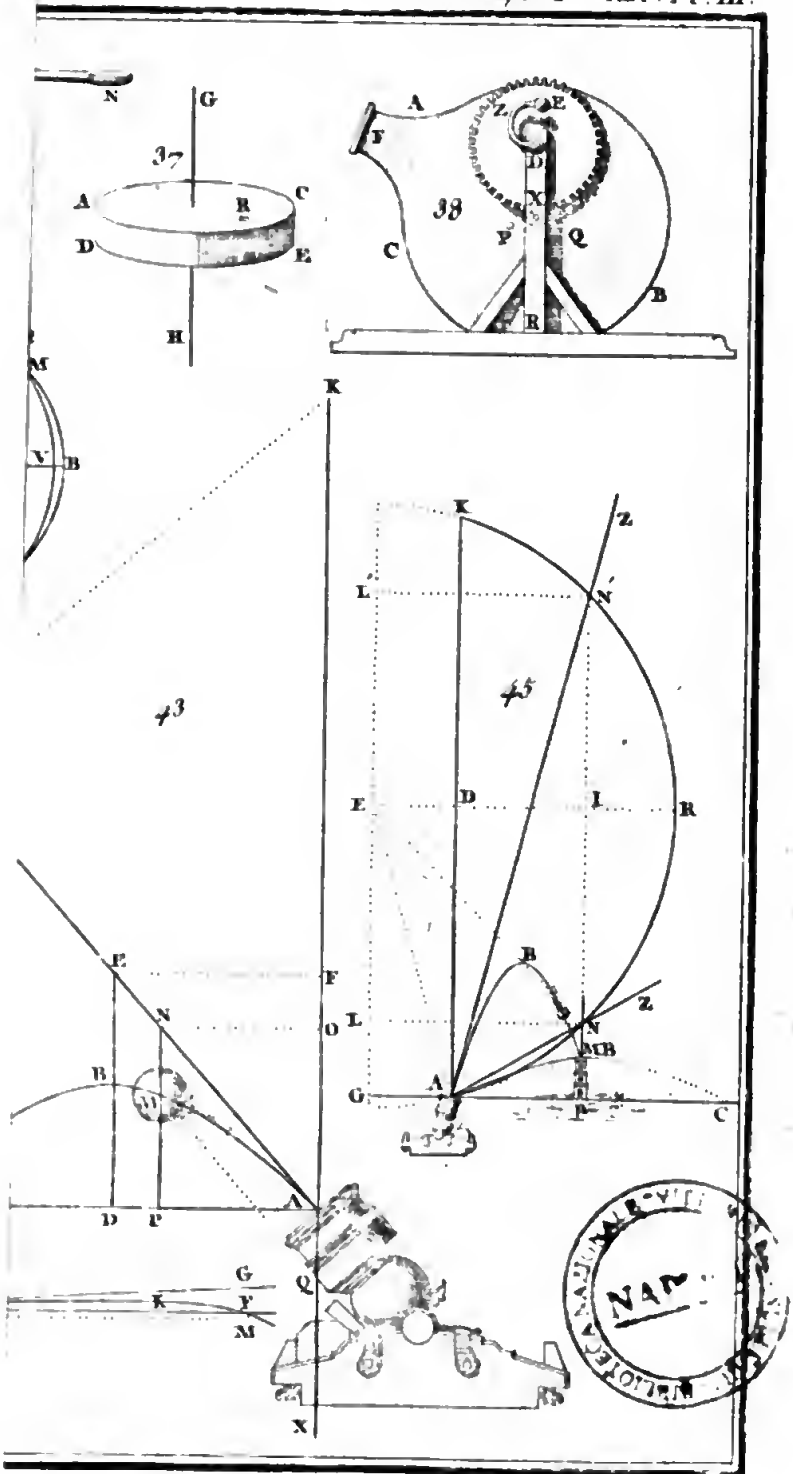


de la Corbelle Sculp.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE NAPOLI

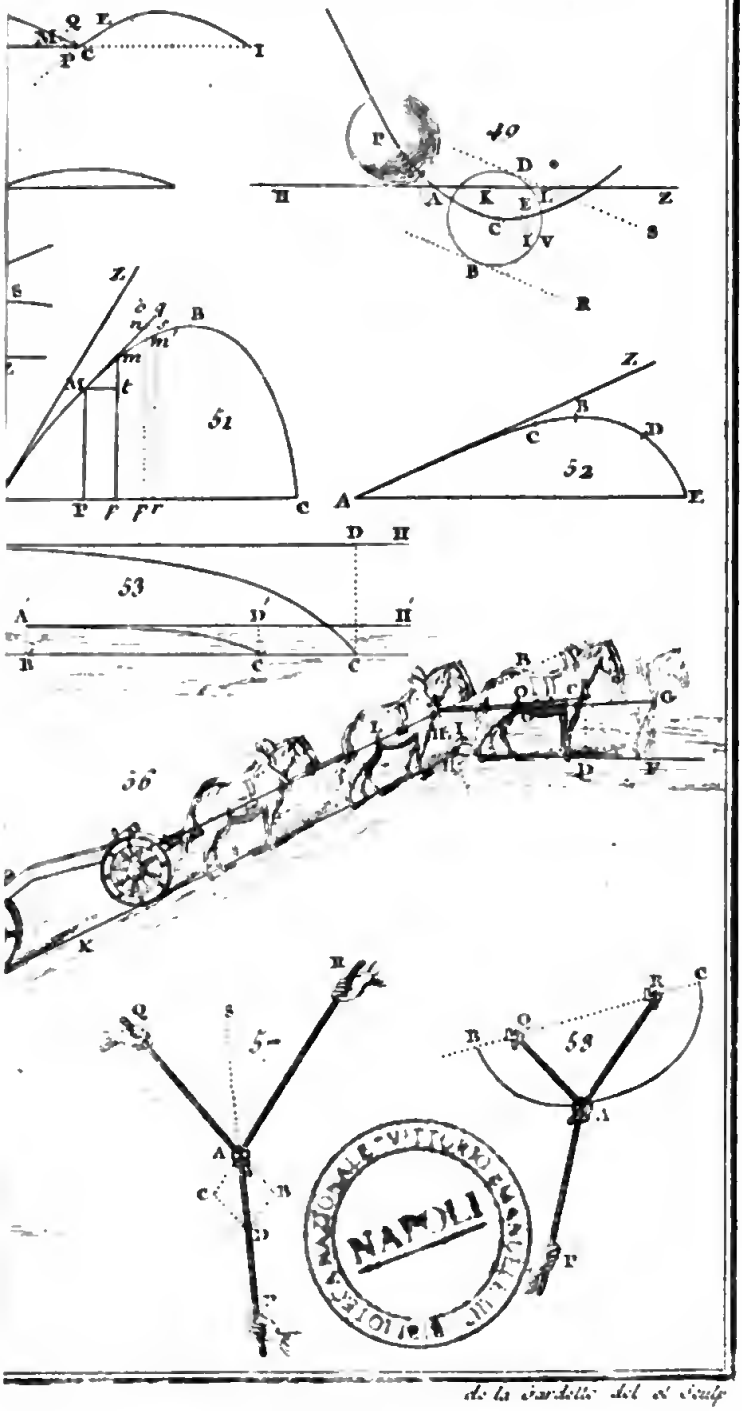


de la Charlotte Sculp.

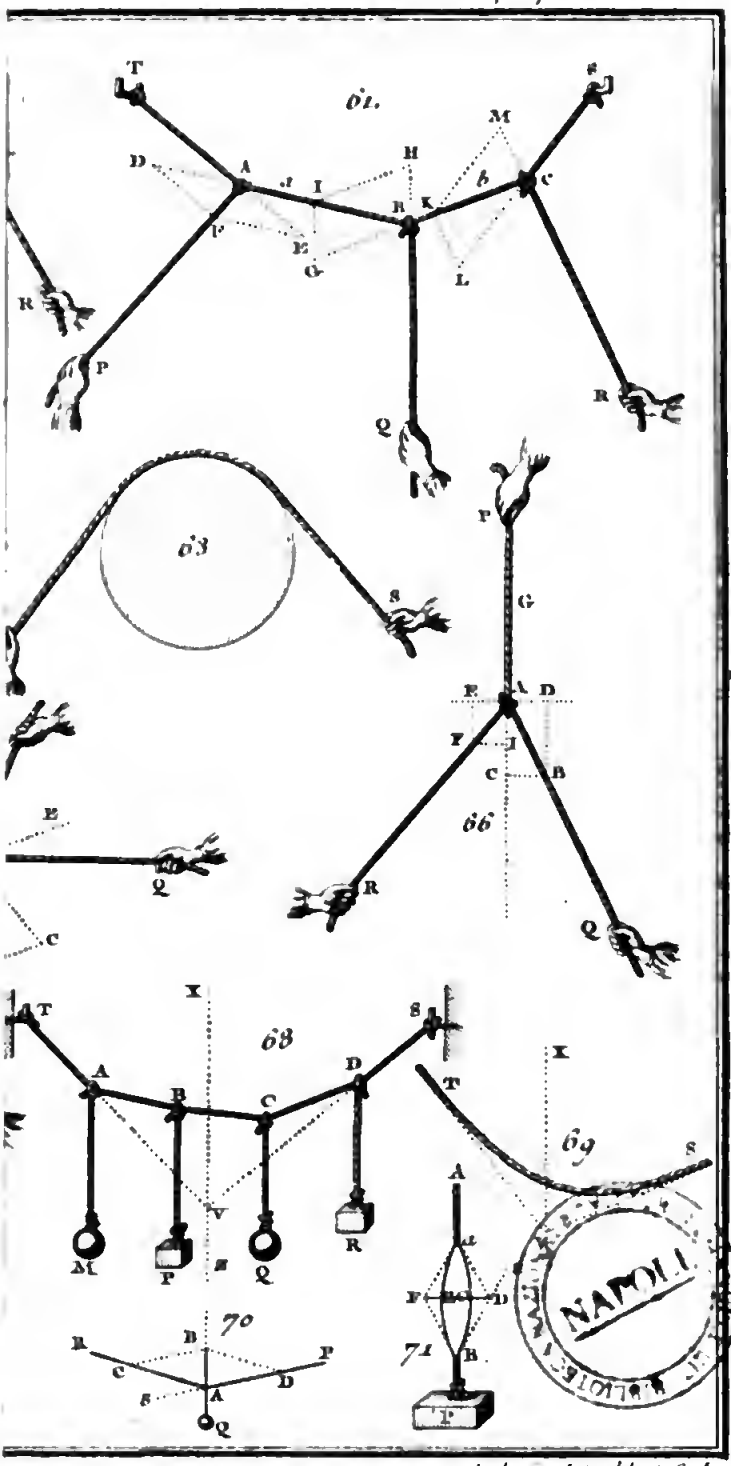


de la Garde Sculp

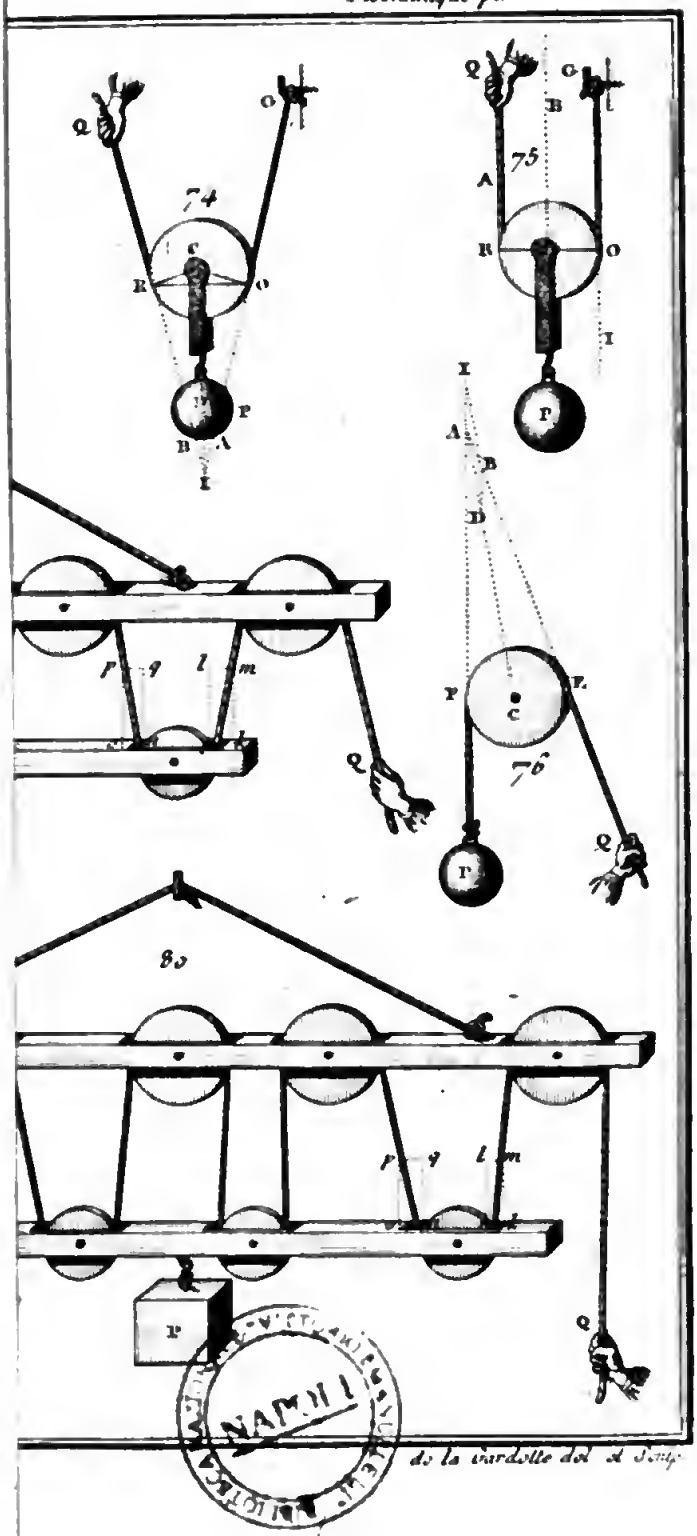
BIBLIOTECA NACIONAL MEXICO
NAL

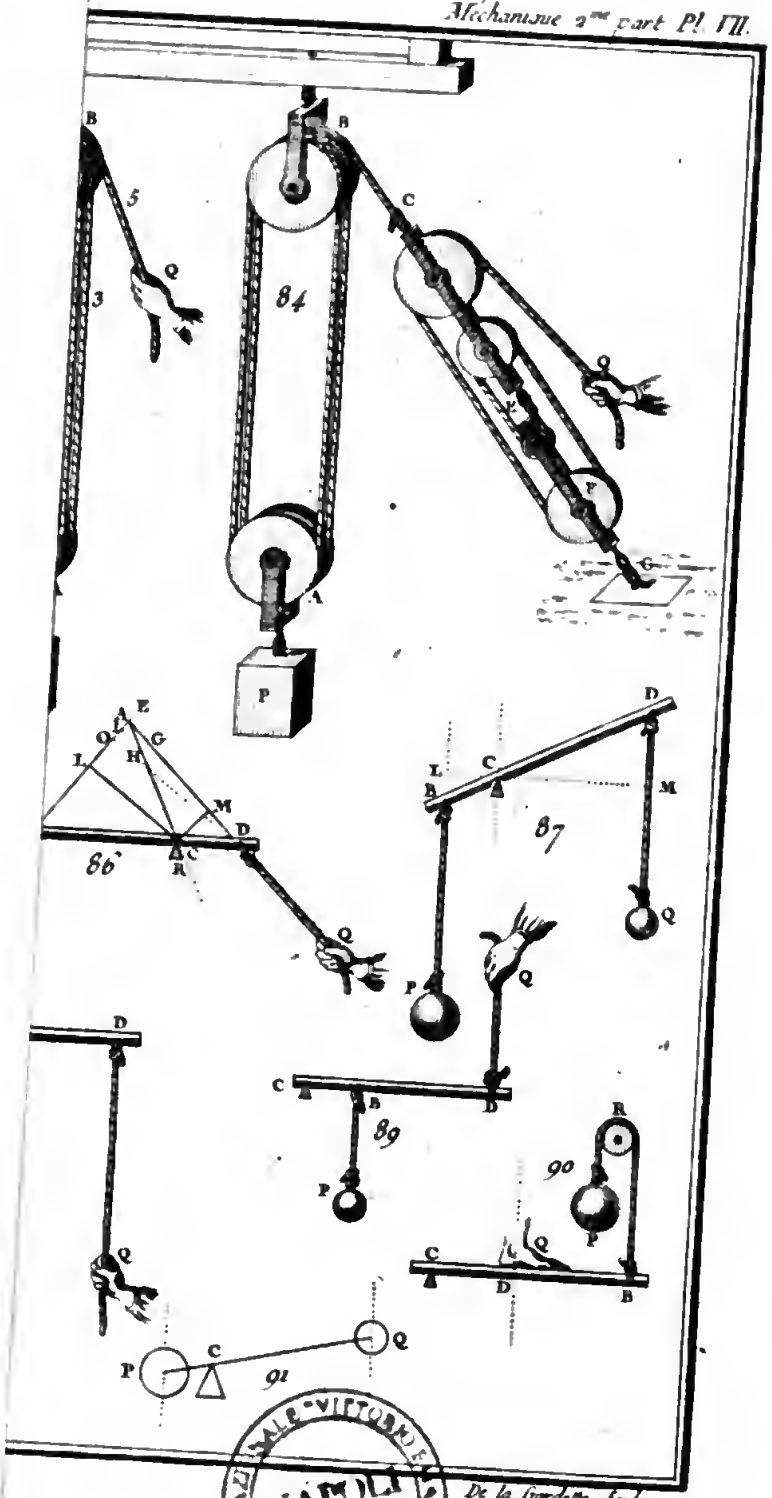


de la Gardelle del et Sculp

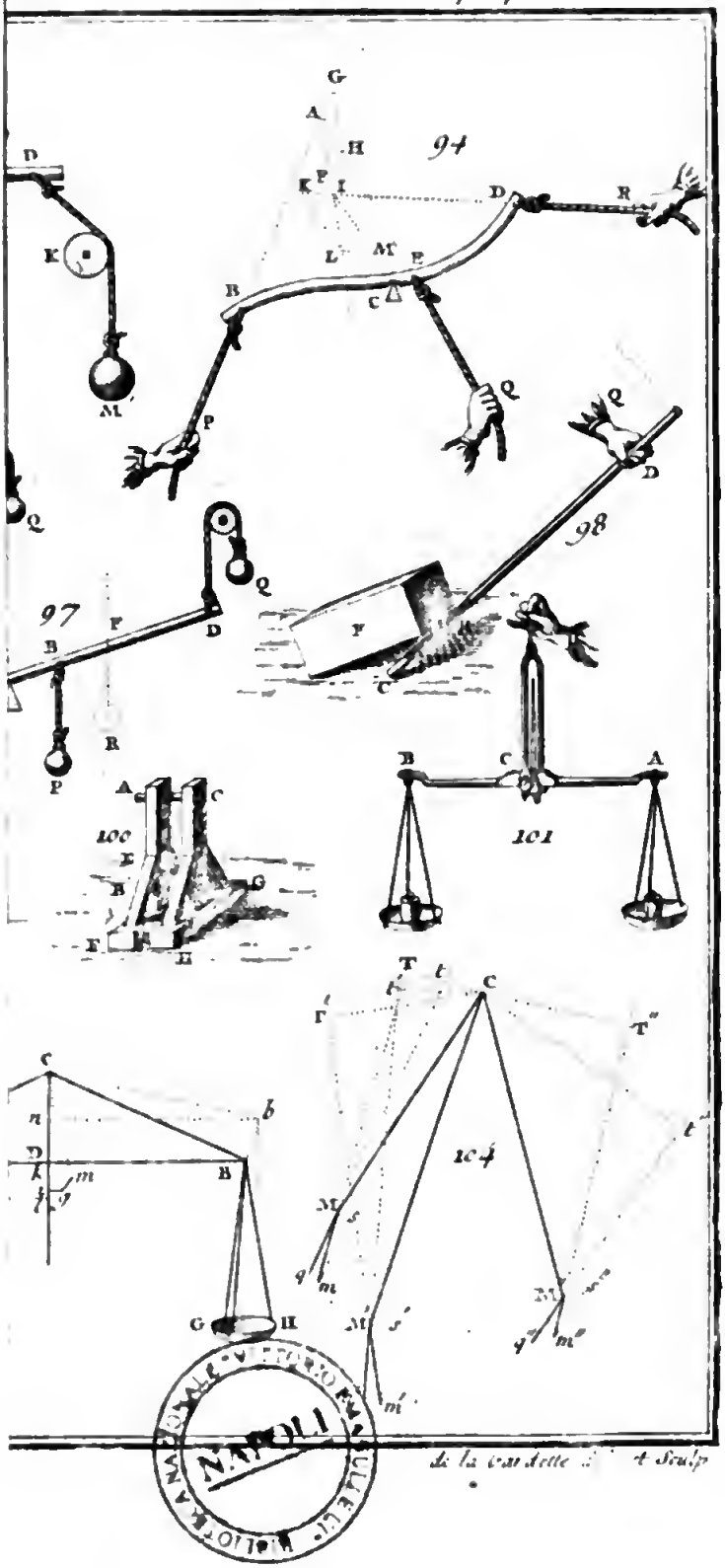


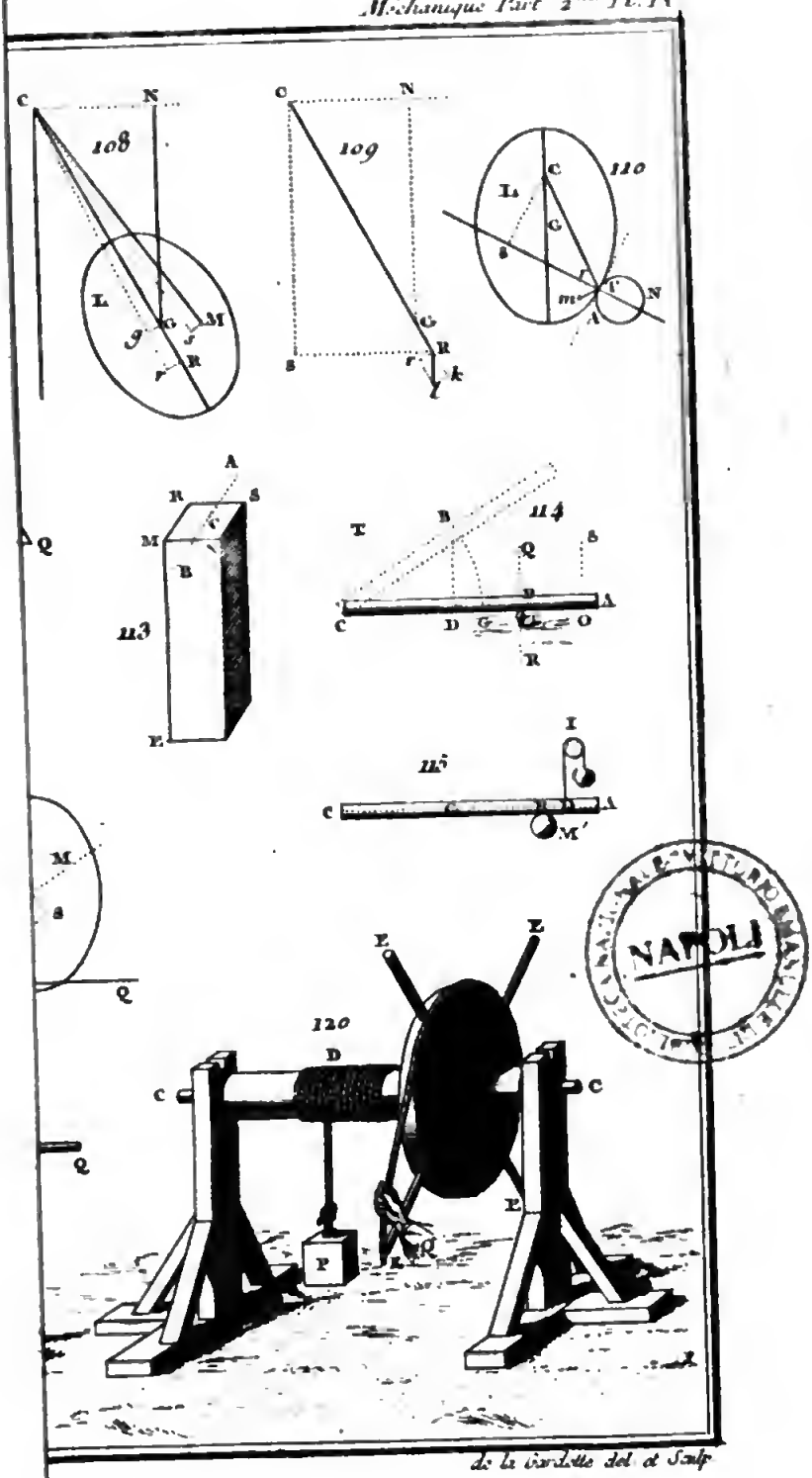
de la cordelle del. et Sculp.


74
75
76
80
Q
P
C
R
O
A
B
I
p q l m
de la Gardolle del. et Sculp.

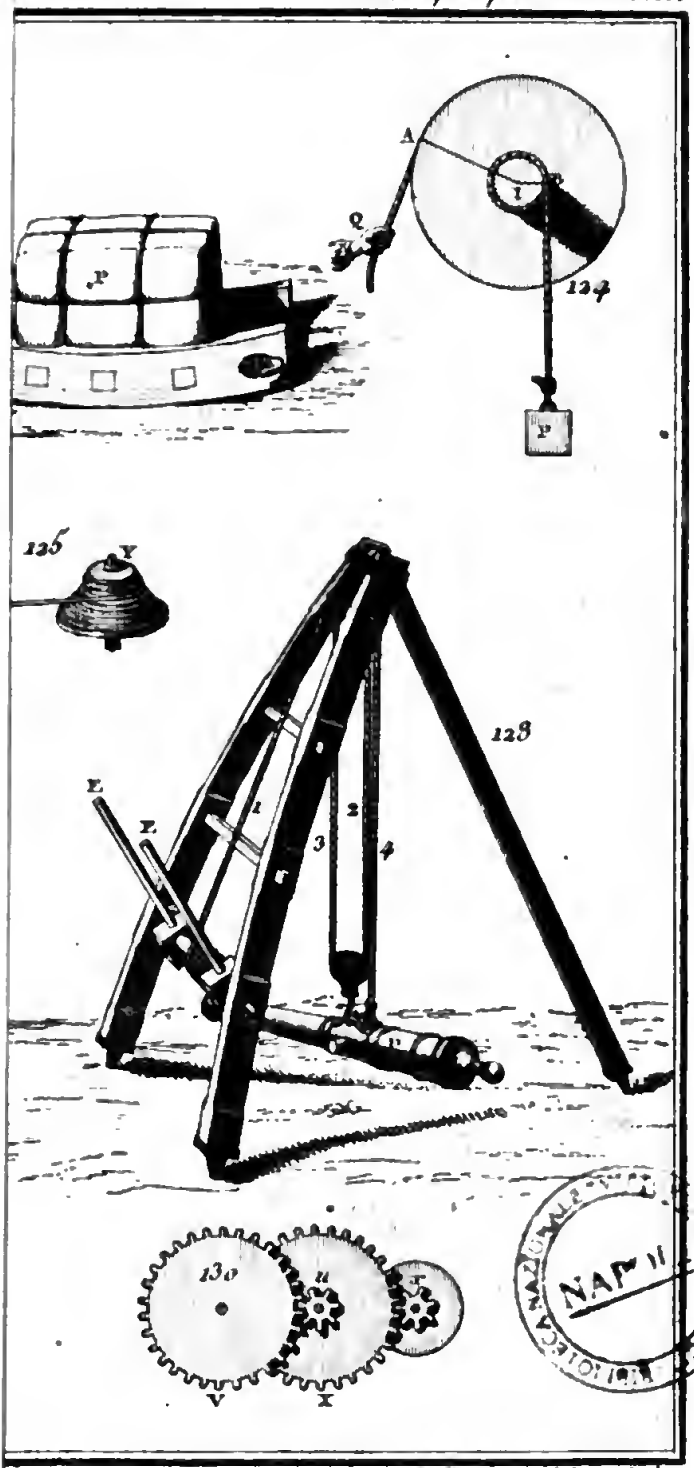


BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO EMANUELE
NAPOLI


94
97
98
100
101
104
N.PDU

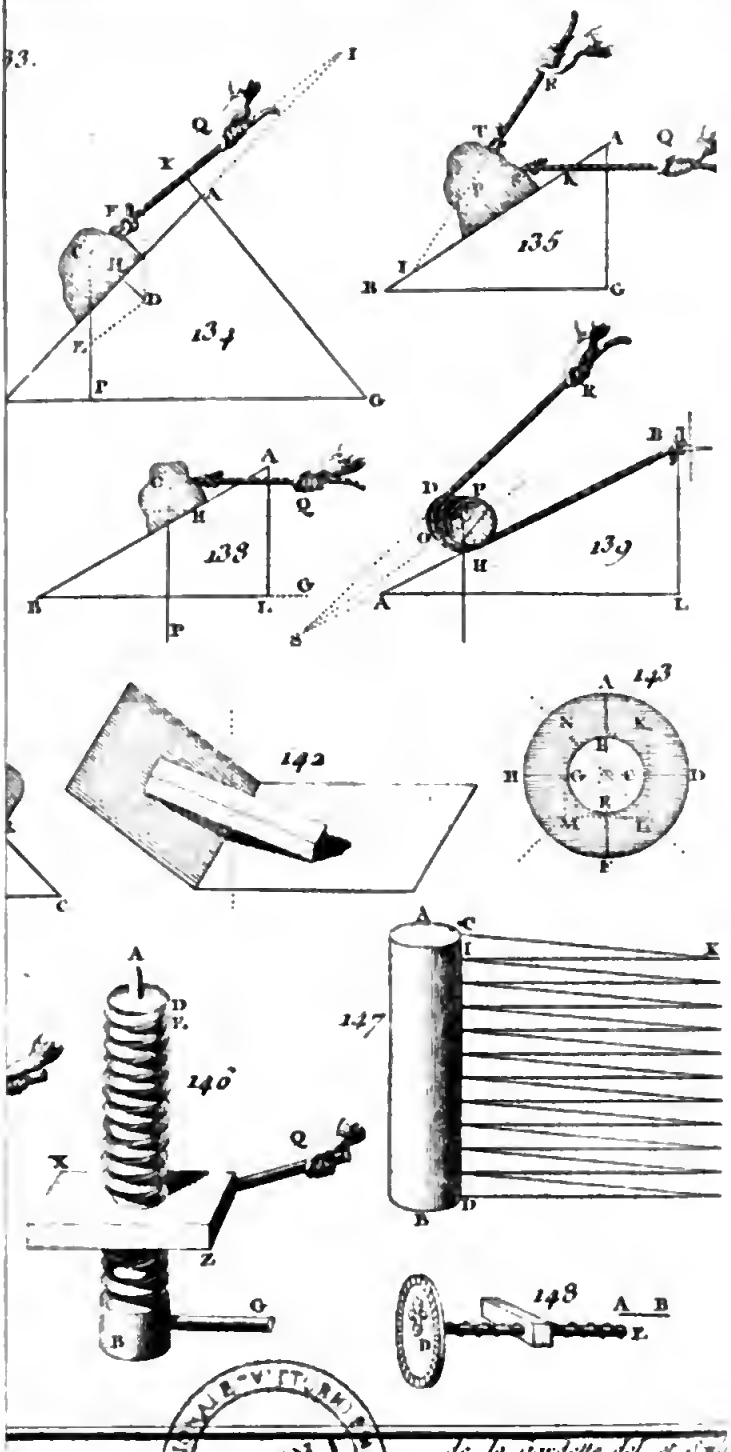


de la Gardette del et Sculp

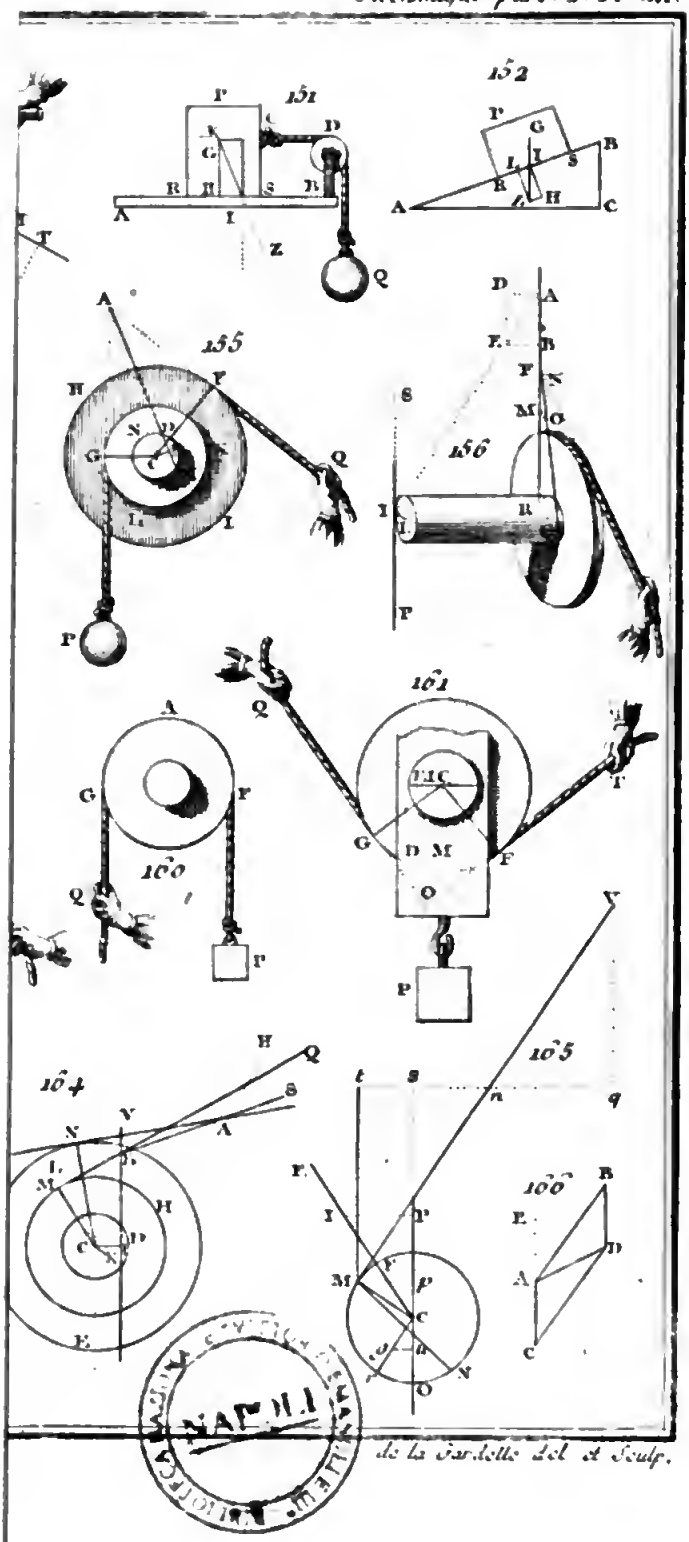


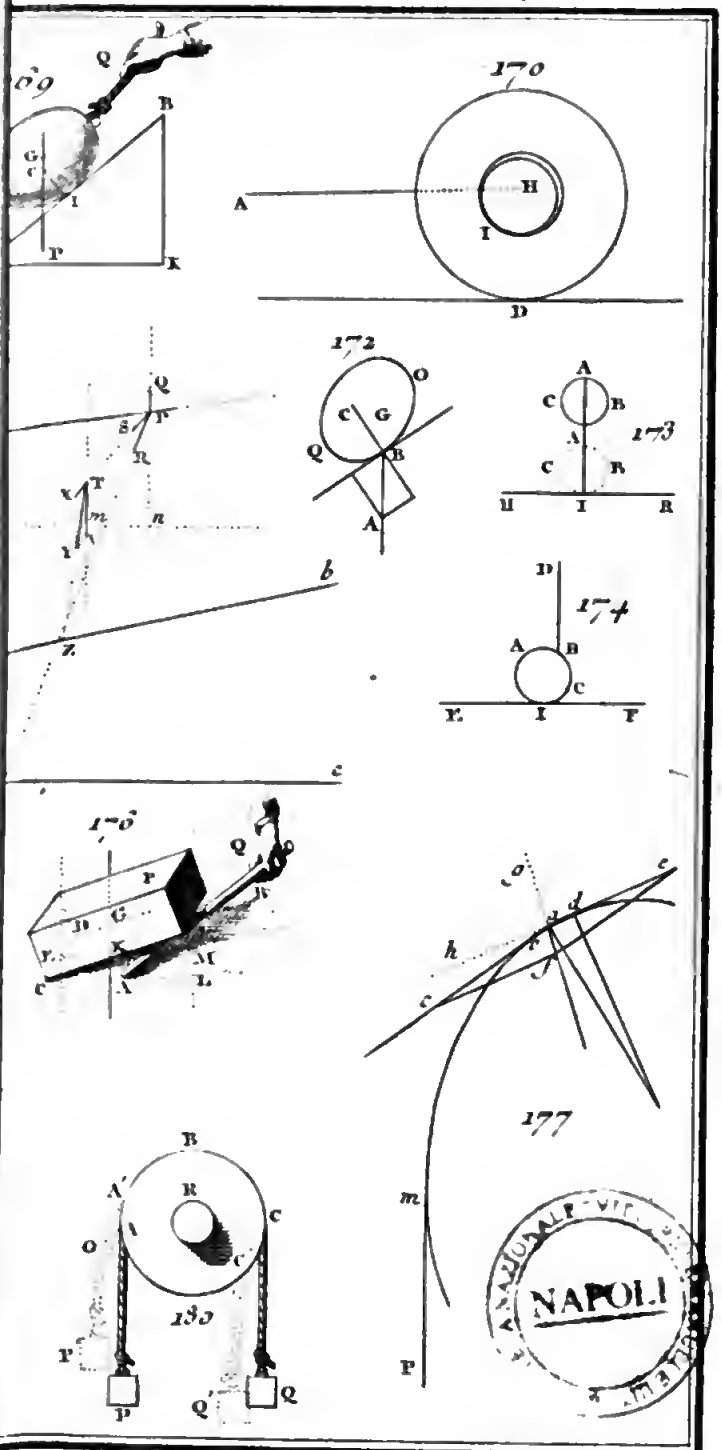
NAP.II

de la Vardette del et Sculp.



BIBLIOTECA NACIONAL


151
152
155
156
160
161
164
165
166
de la Fardelle Del et Sculp.



de la Gardette del. et Sculp.